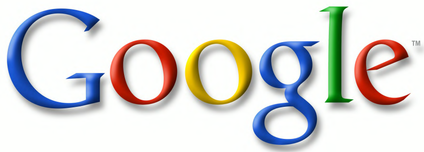


SSARISSEN D

BANK.

nzer vennootschap

ring.
en van den Heer
n reeds geruimen
de Bank betrof. Wij

ENJAMIN als hoofdagent
BONEBAKKER, die als
ns plaats is ingenomen

amelijk de goede gang
ste der suikerfabrieken
ld, terwijl de groote
voor de nieuwe zaken
dt gestaan.

rt van aftreding, doch
tatuten voorgeschreven
verlijden van de
doen.
KARTHAUS en F
KE Jav

OVER METHODEN

BIJ HET OPLOSSEN VAN

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

DOOR

J. VERSLUYS.

DERDE VERBETERDE DRUK.

AMSTERDAM. — 1898. — A. VERSLUYS.

BIJ DEN TWEEDEN DRUK.

Deze tweede druk, die 7 jaar na den eersten verschijnt, is op verschillende plaatsen belangrijk uitgebreid. Bovendien zijn hier en daar verbeteringen aangebracht, die ik voor een deel ben verschuldigd aan den Heer RITTER, *leeraar in de wiskunde te Groningen, en aan den Heer* VAN BREEN, *leeraar in de wiskunde te Arnhem.*

AMSTERDAM, Maart 1885. J. VERSLUYS.

BIJ DEN DERDEN DRUK.

Verschillende kleine verbeteringen zijn aangebracht en hier en daar is het boek eenigszins uitgebreid. Daarentegen is het aantal gemengde vraagstukken aan het slot verminderd.

AMSTERDAM, Nov. 1897. J. VERSLUYS.

OPLOSSING VAN VRAAGSTUKKEN VOLGENS DE ANALYTISCHE METHODE.

§ 1. *Analytische methode bij het bewijzen van stellingen.*

Is een eigenschap gegeven en men tracht haar te bewijzen, dan stelt men zich eerst de vraag, of men zich een bekende eigenschap herinnert, waarvan de gegevene een gevolg is. Is dat niet het geval, dan zoekt men een andere onbekende eigenschap, waarvan de eerste het gevolg is. Zoodra die onbekende eigenschap bewezen is, is het ook de eerste, die er een gevolg van is. Nu ziet men weer of die onbekende eigenschap een onmiddellijk gevolg is van een andere bekende. Zoo ja, dan is zij bewezen en daarmee ook de gegevene. Zoo neen, dan zoekt men een andere onbekende eigenschap, die de tweede tot gevolg heeft. Zoo gaat men voort, tot men aan een eigenschap komt, die bewezen is. Dan zijn alle voorafgaande eigenschappen en daaronder ook de gegevene bewezen.

Bij deze bepaling doet zich de vraag voor: hoe moet men het aanleggen om een eigenschap te vinden, waarvan de gegevene een gevolg is. Om die vraag te beantwoorden, merk ik op, dat in de wiskunde de eigenschappen meestal 2 aan 2 zoo kunnen gegroepeerd worden, dat zij wederkeerig elkaars gevolgen zijn. B.v., als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan volgt daaruit de gelijkheid der overstaande hoeken. En omgekeerd, als in een driehoek twee hoeken even groot zijn, dan volgt daaruit de gelijkheid der overstaande zijden. Men stelt zich dan ook gewoonlijk niet de vraag: van welke eigenschap is de gegevene een gevolg, maar: wat is een gevolg van de gegeven eigenschap. Nadat men zulk een gevolg gevonden heeft, gaat men meestal eerst na, of nu ook de gegevene wederkeerig een gevolg is van haar gevolg

Men zou zelfs de geheele analytische methode aldus kunnen omschrijven: men leidt uit de gegeven eigenschap een andere af, uit deze weer een andere, en zoo gaat men voort, tot men op een eigenschap komt, die reeds bewezen is. Dan gaat men na, of niet alleen elke eigenschap een gevolg is van de voorgaande maar of bovendien elke eigenschap haar voorafgaande tot gevolg heeft. Zoo ja, dan is de gegeven eigenschap bewezen.

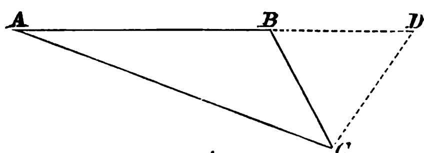
b. Analytische methode bij het oplossen van werkstukken.

Men lost een werkstuk analytisch op, wanneer men voorloopig het gezochte figuur als bekend beschouwt, vervolgens nagaat uit welk ander figuur men het eerste zou kunnen afleiden, en zoo voort, tot men een figuur verkrijgt, dat men met behulp der gegevens in het werkstuk kan samenstellen. Dit figuur construeert men dan, met behulp van dat figuur het voorafgaande, enz. en eindelijk het gevraagde.

Opmerking. Uitvoerige beschouwingen over den aard van de analytische en de synthetische methode vindt men in mijn werkje over methoden bij het onderwijs in wiskunde, enz. We hebben de analytische methode reeds toegepast bij het opsporen van een constructie voor de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels. In het volgende worden van de toepassing der analytische methode nog eenige voorbeelden gegeven.

§ 2. Werkstuk. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn, een hoek aan de grondlijn en de som der opstaande zijden.*

Fig. 1.



Oplossing. Onderstellen wij, dat ABC de verlangde driehoek is met de grondlijn AC en den gegeven hoek A. Was AB verlengd tot D, zóó dat BD = BC, dan was AD gelijk aan de som der opstaande zijden. Was C vereenigd met D, dan zou driehoek BCD gelijkbeenig zijn en dus $\angle$ BCD = $\angle$ D. Was nu driehoek ACD bekend, dan zou men driehoek ABC kunnen vinden, door $\angle$ BCD gelijk te maken aan $\angle$ D. Maar van driehoek ACD zijn twee zijden en de tusschenliggende hoek bekend, zoodat men hem kan construeeren. We hebben dus de volgende

CONSTRUCTIE. Maak hoek A gelijk aan den gegeven hoek, zet op zijn eene been de grondlijn AC uit en op zijn andere been de som der opstaande zijden AD. Vereenig D met C en trek BC zoodanig, dat $\angle$ BCD = $\angle$ D, dan is ABC de verlangde driehoek.

BESPREKING. Uit de constructie blijkt, dat geen twee verschillende driehoeken aan het vereischte voldoen.

§ 3. Het bewijs van deze constructie ligt reeds opgesloten in de daaraan voorafgaande oplossing. Wil men het afzonderlijk geven, dan moet men opmerken, dat AC en hoek A de vereischte grootte bezitten, terwijl uit $\angle$ BCD = $\angle$ D volgt, dat AB + BC = AB + BD of AB + BC = AD, zoodat ook de som der opstaande zijden de vereischte lengte bezit.

§ 4. We hebben bij de bovenstaande oplossing de lijn BC afgepast op het verlengde van AB, omdat daardoor een lijn AD ontstond, waarvan de lengte gegeven was. Zoo handelen we in elk ander dergelijk geval bij de toepassing der analytische methode: wanneer een som of een verschil gegeven is, zorgen we, dat een figuur ontstaat, waarin die som of dat verschil voorkomt als een enkele lijn of een enkele hoek. Om daarbij een figuur te krijgen, dat zoo eenvoudig mogelijk is, laten we een der op te tellen of af te trekken hoeken of lijnen van de gevraagde en als bekend veronderstelde figuur zoo mogelijk op haar plaats. (Dat was hierboven de zijde AB).

Het trekken van de lijn CD werd aangewezen door de omstandigheid, dat op die wijze twee driehoeken ontstaan, terwijl we, voordat die lijn getrokken was, een figuur hadden, dat in de vlakke meetkunde niet wordt behandeld nl. een driehoek, waarvan eene zijde met een bepaald stuk is verlengd.

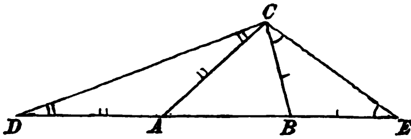
Verder ligt het voor de hand om bij het vormen van een som of een verschil, zoo vaak het kan, de lijn of den hoek op zulk een wijze te plaatsen, dat er een gelijkbeenige driehoek ontstaat. (Dat is in fig. 1 gebeurd). Men kan dan gebruik maken van de eigenschap der hoeken aan de grondlijn van een gelijkbeenigen driehoek.

§ 5. WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, waarvan twee hoeken en de som der zijden gegeven zijn.*

Onderstellen wij, dat ABC de gevraagde driehoek zij. Nemen wij BE = BC en AD = AC, beide op het verlengde van AB;

dan is DE de som der zijden van den gevraagden driehoek.

Fig. 2.



Vereenigen wij C met D en met E, dan ontstaan er twee gelijkbeenige driehoeken ACD en BCE en een driehoek CDE. Is deze laatste bekend, dan kan men ABC krijgen, door CA zoodanig te trekken, dat $\angle$ ACD = $\angle$ D en CB zoodanig, dat $\angle$ BCE = $\angle$ E. Maar omdat CAD gelijkbeenig is, heeft men $\angle D = \frac{1}{2} \angle CAB$, zoodat $\angle$ D bekend is. Op dezelfde wijze blijkt, dat $\angle E = \frac{1}{2} \angle CBA$ bekend is. Van den driehoek CDE is dus een zijde met de twee aanliggende hoeken bekend, zoodat men hem kan construeeren en vervolgens ABC. Wij hebben dus deze

CONSTRUCTIE. Beschrijf een driehoek CDE, die de gegeven som tot eene zijde heeft en waarin de aanliggende hoeken gelijk zijn aan de helften der gegeven hoeken. Trek CA zoodanig, dat $\angle$ DCA = $\angle$ D en CB zoodanig, dat $\angle$ BCE = $\angle$ E. ABC is dan de gevraagde driehoek.

BESPREKING. Men kan op de gegeven som DE als grondlijn slechts één driehoek construeeren, die de helften der gegeven hoeken tot grondhoeken heeft. En verder vindt men dan in geen geval meer dan één driehoek ABC.

De vraag blijft dus nog over, of men altijd één driehoek vindt die aan de gestelde voorwaarden voldoet.

Zal er een driehoek CDE verkregen worden, dan moet $\angle D + \angle E < 180°$, en dus de som der gegeven hoeken kleiner zijn dan 360°. Zal er verder een driehoek ABC zijn, die het dubbele van D en E tot grondhoeken heeft, dan moet het mogelijk zijn om van $\angle$ DCE af te nemen $\angle D + \angle E$.

Men moet dus hebben $\angle DCE > \angle D + \angle E$ of

$$180° - \angle D - \angle E > \angle D + \angle E, \text{ of}$$

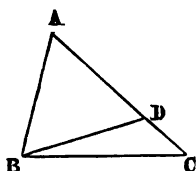
$$2 \angle D + 2 \angle E < 180°.$$

Of in woorden: er zal slechts dan een driehoek worden gevonden, die aan de gestelde voorwaarden voldoet, als de gegeven hoeken samen kleiner zijn dan 180°.

§ 6. WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn, een hoek aan de grondlijn en het verschil der opstaande zijden.*

Eerste geval. *De gegeven hoek ligt tegenover de kleinste der opstaande zijden.*

Fig. 3.

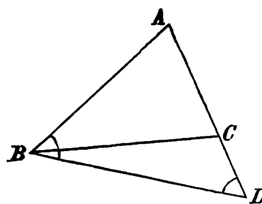


Oplossing. Onderstellen wij, dat ABC de gevraagde driehoek is met de grondlijn BC en den gegeven hoek C. Nemen wij AD = AB, dan is CD het gegeven verschil der opstaande zijden. Trekken wij BD, dan is driehoek ABD gelijkbeenig, en zoodra driehoek BCD bekend is, zou men ABC kunnen krijgen, door CD te verlengen en BA zoodanig te trekken, dat ∠ ABD = ∠ ADB. Maar van driehoek BCD zijn twee zijden en de ingesloten hoek C bekend, zoodat men hem kan construeeren. We hebben dus de volgende

Constructie: Construeer een driehoek BCD, die tot zijden heeft de gegeven grondlijn en het gegeven verschil en tot ingesloten hoek den gegeven hoek. Verleng CD en maak ∠ ABD = ∠ ADB, dan is AD = AB en CD = AC — AB; zoodat ABC aan de gestelde voorwaarden voldoet.

Tweede geval. *De gegeven hoek ligt tegenover de grootste der opstaande zijden.*

Fig. 4.



Oplossing. Onderstellen wij, dat ABC de verlangde dr. zij met de grondlijn BC en den bekenden hoek C. Passen wij de grootste der opstaande zijden AB in AD af op de kleinste en haar verlengde, dan is CD het verschil der opstaande zijden. Trekken wij BD, dan is dr. ABD gelijkbeenig. Was nu dr. BDC bekend, dan zou men driehoek ABC kunnen vinden, door DC te verlengen en ∠ ABD gelijk te maken aan ∠ D. Maar van driehoek BCD zijn bekend de zijden BC en CD, terwijl de ingesloten hoek het supplement is van den gegeven hoek.

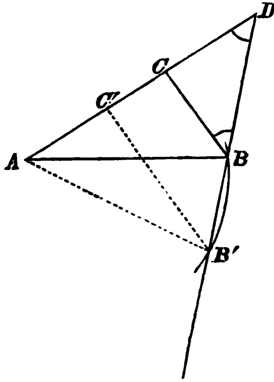
Bespreking. Deze laten we aan den lezer over.

§ 7. Werkstuk. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn, de tophoek en de som der opstaande zijden.* Zie fig. 5.

Onderstellen wij, dat ABC de gevraagde dr. zij met de gegeven grondlijn AB. Nemen wij op het verlengde van AC een lijn CD = CB, dan is AD de som der opstaande zijden. Trek-

ken wij BD, dan is dr. BCD gelijkbeenig en $\angle$ D de helft van den tophoek ACB. Was nu driehoek ABD bekend, dan zou men ABC vinden, door BC zoodanig te trekken, dat $\angle$ CBD = $\angle$ D. Maar van driehoek ABD zijn bekend twee zijden (AD en AB) en de hoek D. Dezen driehoek kan men dus construeeren en vervolgens ABC. We hebben nu de volgende

Fig. 5.



CONSTRUCTIE. Neem een hoek D, die gelijk is aan de helft van den gegeven hoek. Neem op het eene been van dien hoek een stuk DA, dat gelijk is aan de gegeven som. Beschrijf uit A met de gegeven grondlijn als straal een cirkel, die het been DB snijdt in B. Trek AB en maak $\angle$ DBC = $\angle$ D, dan is ABC een driehoek, die aan het vereischte voldoet.

BEWIJS. Daar $\angle ACB = \angle CBD + \angle D = 2 \angle D$, is hoek ACB gelijk aan den gegeven tophoek. Daar $\angle CBD = \angle D$, is $BC = CD$ en $AC + BC = AD$, gelijk aan de gegeven som. Bovendien is AB gelijk aan de gegeven grondlijn genomen.

BESPREKING. Is de grondlijn kleiner dan de loodlijn uit A op DB neergelaten, zoo vindt men geen enkelen driehoek, die aan het vereischte voldoet. Is de grondlijn gelijk aan die loodlijn, dan levert de cirkel, dien men beschrijft, een snijpunt B op. De lijn BC, die men vervolgens moet trekken, valt binnen den driehoek ABD, en hieruit blijkt, dat men dan een driehoek krijgt, die aan het vereischte voldoet. Is de grondlijn grooter dan genoemde loodlijn en kleiner dan de som der opstaande zijden, zoo levert de cirkel twee snijpunten B en B′ op. De rechte lijn BC, die men vervolgens krijgt, door $\angle$ DBC gelijk te maken aan $\angle$ D, valt binnen den driehoek ABD, omdat uit $AB < AD$ volgt, dat $\angle$ D kleiner is dan $\angle$ ABD. Het punt B levert dan een driehoek ABC op, die aan het vereischte voldoet. Op dezelfde manier blijkt, dat het punt B′ een driehoek AB′C′ oplevert, die aan het vereischte voldoet.

Intusschen zijn de driehoeken ABC en B′AC′ wel verschillend in stand, maar ze zijn congruent. Men heeft nl.

$AB = AB'$, $\angle ACB = \angle AC'B'$ en $\angle CAB = \angle ABB' - \angle D$,
of $\angle CAB = \angle AB'B - \angle C'B'D$
of $\angle CAB = \angle AB'C'$,

zoodat ABC en B'AC' een zijde en twee hoeken gelijk hebben.

Is de grondlijn gelijk aan de som der opstaande zijden, dan weet men vooruit, dat er geen driehoek mogelijk is, die aan het vereischte voldoet. Uit de constructie blijkt het, doordat de lijn BC samenvalt met BA.

Is de grondlijn grooter dan de som der opstaande zijden, dan volgt uit $AB' > AD$, dat $\angle D > \angle AB'D$, zoodat de lijn B'C' buiten AB'D zou komen. Ook in dit geval is er geen driehoek, die aan het vereischte voldoet.

§ 8. Werkstuk. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven is de grondlijn, het verschil der opstaande zijden en het verschil der hoeken aan de grondlijn.*

Aanwijzing. Nemen we weer (zie fig. 3) AD = AB en trekken we weer BD, dan ligt het voor de hand, om te onderzoeken of men een der hoeken van driehoek ACD kan uitdrukken in het gegeven verschil van hoeken.

§ 9. Werkstuk. *Een rechthoekigen driehoek te construeeren, waarvan de schuine zijde gegeven en waarbij de eene rechthoekszijde gelijk is aan de projectie van de andere rechthoekszijde op de schuine zijde.*

Aanwijzing. Men onderstelt, dat een driehoek geconstrueerd is, die aan de vereischten voldoet. De eigenschap, dat de eene rechthoekszijde gelijk is aan de projectie van de andere op de schuine zijde, tracht men in verbinding te brengen met de gewone eigenschappen van alle rechthoekige driehoeken.

Doet men dit, dan vindt men gemakkelijk, dat de projectie, waarvan in 't werkstuk gesproken wordt, het grootste stuk is van de in de uiterste en middelste reden verdeelde schuine zijde.

§ 10. Werkstuk. *Door een snijpunt van twee cirkels een rechte lijn zoodanig te trekken, dat de afstand der andere twee snijpunten van die lijn met de cirkelomtrekken een gegeven lengte bezit.*

Stellen wij ons voor, dat MN de bedoelde lijn zij. Laat CP en DR de loodlijnen zijn, uit de middelpunten op

MN neergelaten, dan is AP de helft van AM en AR de helft van AN. PR is dus de helft van MN. Loopt DL evenwijdig aan RP, dan is DL = RP en ∠ CLD recht.

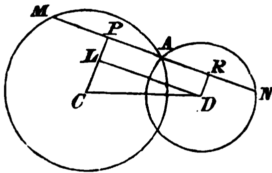


Fig. 6.

In den rechthoekigen driehoek CDL is de schuine zijde bekend met de rechthoekszijde DL. Men kan dien driehoek dus construeeren. Trekt men vervolgens door A een lijn evenwijdig aan DL, dan is MN = 2 DL, zoodat MN de verlangde lijn is.

We hebben hierboven de lijn MN zoo gekozen, dat M en N aan verschillenden kant van A liggen. Onderstellen we nu, dat ze aan een zelfden kant van A liggen, zooals in fig. 7. Laten we weer de loodlijnen CP en DR neer op MN, verlengen we DR en trekken CL rechthoekig op DL, dan is △ CDL rechthoekig. Verder is CL = PR = PA − RA = ½ (MA − NA).

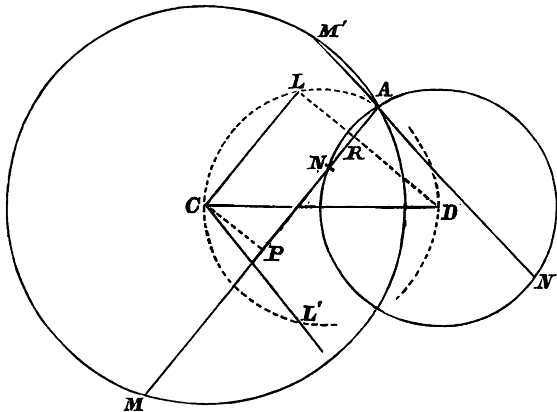


Fig. 7.

Men kan dus ook bij deze onderstelling △ CDL construeeren en vervolgens door A evenwijdig aan CL de lijn MN trekken.

Bespreking. Trekken we door A een rechte lijn evenwijdig aan CD, dan is de afstand der overige snijpunten van die rechte lijn met de cirkelomtrekken gelijk aan 2 keer CD. Loopt de lijn MN niet evenwijdig aan CD, dan is ze volgens het bovenstaande kleiner dan 2 keer CD.

Daaruit volgt dus, dat niet aan het vereischte kan voldaan worden, als de gegeven afstand grooter is dan 2 maal de afstand der middelpunten.

Is de gegeven afstand juist gelijk aan 2 maal den afstand der middelpunten, dan vindt men één rechte lijn, die aan het vereischte voldoet en wel de rechte lijn, die door het snijpunt der cirkelomtrekken evenwijdig wordt getrokken aan de rechte lijn, die de middelpunten verbindt.

Is de gegeven afstand kleiner dan 2 maal de afstand der middelpunten, dan kan men 2 driehoeken CDL en CDL′ construeeren, die ieder een lijn opleveren, welke aan het gevraagde voldoen.

Nu kan men nog de vraag stellen, wanneer de uiteinden der gevraagde lijn aan weerszijden van het snijpunt der cirkels liggen. Zonder deze vraag uitvoerig te bespreken, merken we het volgende op. De grenzen worden opgeleverd door de koorden der twee cirkels, die raaklijnen zijn telkens aan den anderen cirkel. Die twee koorden zijn in 't algemeen ongelijk. Is nu de gegeven lengte kleiner dan de kleinste dier 2 koorden, dan vindt men 2 lijnen, die beide hun uiteinden aan een zelfden kant van het snijpunt der cirkels hebben.

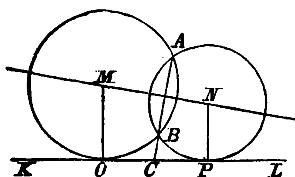
Is de gegeven lijn grooter dan de kleinste der twee koorden en kleiner dan de grootste, zoo vindt men 2 lijnen, waarvan bij de eene de uiteinden aan weerszijden van het snijpunt der cirkels liggen en bij de andere aan een zelfden kant.

Is de gegeven lijn grooter dan de grootste der twee koorden en kleiner dan 2 maal de afstand der middelpunten, zoo vindt men twee lijnen, waarvan de uiteinden telkens aan een zelfden kant van het snijpunt der twee cirkels liggen.

Is de gegeven lijn gelijk aan een der 2 koorden, dan vormt deze een oplossing, waarbij het eene uiteinde samenvalt met het snijpunt der 2 cirkels.

§ 11. WERKSTUK. *Een cirkelomtrek te beschrijven, die door twee gegeven punten gaat en raakt aan een gegeven rechte lijn.*

Fig. 8.



Laat A en B de gegeven punten zijn, KL de rechte lijn. Onderstellen wij, dat ABO een cirkelomtrek is, die aan het gestelde voldoet. Verlengen wij dan AB tot in C, en zij O het raakpunt, dan is CO middelevenredig tusschen CA en CB. Maar CA en CB zijn bekend, zoodat we CO kunnen construeeren. Hierdoor is het raakpunt

bekend, en we kunnen dan een cirkelomtrek brengen door A, B en O.

Bespreking. Door de middenevenredige tusschen CA en CB rechts van C af te zetten op KL, vinden we een raakpunt P van een tweeden cirkelomtrek, die aan het vereischte voldoet. We kunnen dus zeggen: *er zijn twee cirkelomtrekken, die aan het vereischte voldoen, als de twee gegeven punten aan een zelfden kant der gegeven lijn liggen en als deze wordt gesneden door de rechte lijn, die door de twee gegeven punten gaat.* De twee cirkelomtrekken zijn gelijk, als de rechte lijn AB rechthoekig op KL staat; ze zijn ongelijk, als AB scheeve hoeken maakt met KL.

De constructie gaat niet meer door, als AB evenwijdig loopt met KL. Het raakpunt moet dan liggen op de rechte lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt. Men vindt in dit geval *één cirkelomtrek*, die aan het vereischte voldoet.

Er is geen cirkelomtrek, die aan het vereischte voldoet, als de twee gegeven punten aan verschillenden kant der gegeven lijn liggen.

Ligt een der twee gegeven punten in de gegeven rechte lijn, dan is dat eene punt tevens het raakpunt, en men vindt gemakkelijk een cirkelomtrek, die aan het vereischte voldoet.

Liggen de twee punten in de gegeven lijn, dan kan er geen cirkel zijn, die aan het vereischte voldoet, omdat de gegeven lijn niet te gelijk een snijlijn en een raaklijn van denzelfden cirkel kan zijn.

§ 12. Werkstuk. *Een cirkelomtrek te beschrijven, die door twee gegeven punten gaat en raakt aan een gegeven cirkelomtrek.*

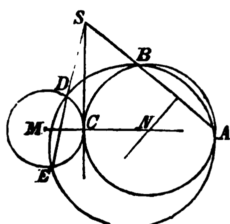
Laat A en B de gegeven punten zijn, DCE de gegeven cirkelomtrek. Onderstellen wij, dat ABC de gevraagde cirkelomtrek zij en C het raakpunt van den gegeven en den gevraagden cirkelomtrek. Het werkstuk zou opgelost zijn, als wij het snijpunt S kenden van de raaklijn in C met de rechte lijn door A en B. Trekken wij door S en een willekeurig punt D van den gegeven cirkelomtrek eene rechte lijn SDE, dan heeft men

$$SA \times SB = SC^2 = SD \times SE,$$

waaruit blijkt, dat A, B, D en E op één cirkelomtrek liggen.

Is nu S gegeven, dan kan men E vinden, en omgekeerd als E bekend is, kan men S vinden. Beschrijven wij een cirkel, die door A en B gaat en den gegeven cirkelomtrek snijdt in D en E. Verlengen we ED, tot zij AB snijdt, dan is het snijpunt het gevraagde punt S. Een raaklijn uit dat snijpunt aan den gegeven cirkelomtrek getrokken levert het raakpunt C op, en een cirkelomtrek door A, B en C is de gevraagde. We hebben dus de volgende

Fig. 9.



Constructie. Beschrijf een cirkelomtrek, die door de gegeven punten A en B gaat en den gegeven cirkelomtrek snijdt in twee punten D en E. Verleng ED tot zij AB snijdt in S, trek uit S een raaklijn SC aan den gegeven cirkelomtrek en trek een cirkelomtrek door A, B en C, dan voldoet de kromme lijn aan het gevraagde.

Bewijs. Daar $CS^2 = SD \times SE = SA \times SB$, zal de cirkelomtrek door A, B en C gaande in C raken aan de rechte lijn MC en dus ook aan den gegeven cirkelomtrek.

Opmerking. Weet men eenmaal, dat C het raakpunt der twee cirkels is, dan weet men, dat het middelpunt van den gevraagden cirkel in de rechte lijn door M en C moet liggen en dus het snijpunt is van die rechte lijn met de rechte lijn, welke AB rechthoekig middendoor deelt.

Bespreking. De bovenstaande constructie gaat door, zoolang AB en DE elkaar snijden. Men kan dan uit het snijpunt S twee raaklijnen aan den gegeven cirkel trekken, en elk van die raaklijnen levert een raakpunt C op en een cirkel, die aan het vereischte voldoet.

Één cirkel voldoet slechts in het geval, dat het raakpunt C in éene rechte lijn komt te liggen met de beide gegeven punten; m. a. w. als de beide punten zoodanig zijn gegeven, dat de lijn, die er doorheen gebracht kan worden, aan den gegeven cirkel raakt. In dat geval toch gaat één der cirkels over in eene rechte lijn. De cirkel, die voldoet, wordt door den gegeven cirkel uitwendig of inwendig geraakt, al naardat de gegeven punten al of niet aan dezelfde zijde liggen van het raakpunt C van den gegeven cirkel.

De bovenstaande constructie gaat niet meer door, als AB en DE evenwijdig loopen. Ook de raaklijn in C moet alsdan evenwijdig loopen met AB, want sneed zij AB in een punt S, dan moest ook ED door dat zelfde punt gaan. We kunnen dus in dit geval het raakpunt vinden, door uit M een loodlijn neer te laten op AB. Die loodlijn snijdt den gegeven cirkelomtrek in twee punten, die ieder een raakpunt vormen.

Opdat de bovenstaande constructie doorga, is noodig, dat S buiten den gegeven cirkel valt. Maar wanneer A en B beide buiten den gegeven cirkel liggen, snijdt AB niet DE zelf maar het verlengde van DE. Hieruit volgt, dat S buiten den gegeven cirkel ligt.

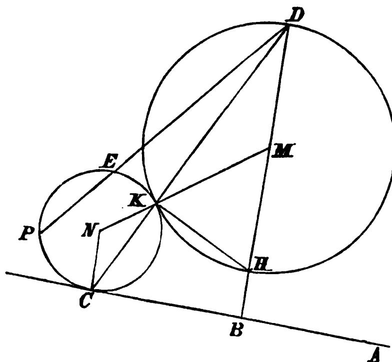
Liggen de twee gegeven punten beide binnen den gegeven cirkel, dan gaat de bovenstaande constructie door. (Men zie hierbij § 23).

Men vindt geen cirkel, die aan het vereischte voldoet, als het eene der gegeven punten binnen en het andere buiten den gegeven cirkel ligt.

Ligt een der twee gegeven punten in den gegeven cirkelomtrek, dan is dat punt tevens het raakpunt; men vindt dan slechts één cirkelomtrek, die aan het vereischte voldoet.

Liggen de gegeven punten beide in den gegeven cirkelomtrek, dan moet de gevraagde cirkel samenvallen met den gegeven cirkel.

Fig. 10.



§ 13. WERKSTUK. *Een cirkelomtrek te beschrijven, die door een gegeven punt gaat en raakt aan een gegeven cirkel en aan een gegeven rechte lijn.*

Zij N het middelpunt van den gevraagden cirkel, die door het gegeven punt P gaat en raakt aan de gegeven lijn A en den gegeven cirkelomtrek DKH.

Laten wij uit N een loodlijn NC neer op AB, dan is C het raakpunt van den gevraagden cirkel met A. Trekken

wij door M de rechte lijn DB evenwijdig met NC, en vereenigen wij de middelpunten der twee cirkels door de rechte lijn MN, dan gaat deze door het raakpunt K. Trekken wij CK en DK, dan ontstaan gelijkbeenige driehoeken DMK en CNK, die den tophoek en bijgevolg ook de hoeken aan de grondlijn gelijk hebben. Hieruit volgt, dat DK en KC in elkaars verlengde vallen. Trekken wij nu HK, dan ontstaat een vierhoek BCKH, waarvan twee overstaande hoeken recht zijn, en waarom men dus een cirkel kan beschrijven.

Hieruit volgt . . . . $DH \times DB = DK \times DC$

Als wij DP trekken, is $\underline{DE \times DP = DK \times DC}$

We hebben dus $DH \times DB = DP \times DE$.

Daar DH, DB en DP bekend zijn, kan men hieruit DE vinden. Van den gevraagden cirkelomtrek is nu een tweede punt bekend, zoodat het werkstuk teruggebracht is tot dit andere: een cirkelomtrek te beschrijven, die door twee gegeven punten E en P gaat en raakt aan een gegevene rechte lijn A.

Bespreking. Het is onmogelijk, om aan het vereischte te voldoen, als het gegeven punt en de gegeven cirkel aan verschillende kanten van de gegeven lijn liggen, terwijl de gegeven lijnen elkaar niet raken.

Ligt het gegeven punt buiten den gegeven cirkel en met dezen aan denzelfden kant der gegeven rechte lijn, dan vindt men twee uitwendig rakende cirkels, die aan het vereischte voldoen; omdat er door E en P twee cirkels kunnen gebracht worden, die raken aan AC. Op dezelfde wijze blijkt, dat er twee inwendig rakende cirkels zijn, die aan het vereischte voldoen. Er zijn dus, als het gegeven punt buiten den gegeven cirkel ligt en met dezen aan een zelfden kant der gegeven rechte lijn, vier cirkels, die aan het vereischte voldoen.

Er bestaan slechts 2 cirkels, als het gegeven punt binnen den gegeven cirkel ligt, en de rechte lijn den cirkelomtrek snijdt. Er bestaat slechts een cirkel, die aan 't gestelde voldoet, als het gegeven punt binnen den gegeven cirkel ligt en de rechte lijn den cirkelomtrek raakt.

Ligt het gegeven punt op de gegeven rechte lijn of op den gegeven cirkelomtrek, dan is dat punt tevens een der raakpunten; er zijn dan slechts twee cirkels, die aan het vereischte voldoen.

Raken de gegeven lijnen elkaar en ligt het gegeven punt aan den anderen kant der gegeven rechte lijn als de gegeven cirkel, dan is er slechts één cirkel, die aan het gevraagde voldoet, en deze raakt de twee gegeven lijnen in hun gemeenschappelijk raakpunt.

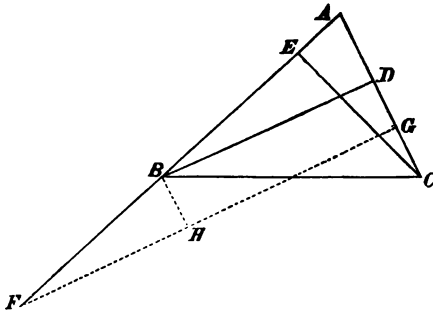
Raken de gegeven lijnen elkander en valt het gegeven punt samen met hun raakpunt, dan zijn er een onbepaald aantal cirkels, die aan het vereischte voldoen. Deze raken alle de gegeven lijnen in hun gemeenschappelijk raakpunt.

§ 14. Hierboven hebben wij de analytische methode toegepast bij het oplossen van werkstukken; ook tot het bewijzen van stellingen kan men haar aanwenden.

STELLING. *Als twee driehoeken den tophoek gelijk hebben en de som der opstaande zijden, dan hebben zij ook de som der hoogtelijnen op de opstaande zijden gelijk.*

BEWIJS. Laat ABC een van de twee driehoeken zijn met A als tophoek. Nemen wij op het verlengde van AB een stuk BF = AC, dan is AF gelijk aan de som der opstaande zijden. Laat men uit F een loodlijn FG neer op AC en trekt men BH evenwijdig met AC, dan wordt FG in twee stukken verdeeld, waarvan het eene HG gelijk is aan de hoogtelijn BD. Het andere FH is gelijk aan de hoogtelijn CE, omdat de rechthoekige driehoeken BFH en ACE de schuine zijde en een scherpen hoek gelijk hebben. FG is dus gelijk aan de som der twee bedoelde hoogtelijnen, en het is nu noodig en voldoende, dat FG in den eenen driehoek gelijk zij aan de overeenkomstige lijn *fg* in den anderen driehoek. Maar die lijnen zijn gelijk als overeenkomstige zijden in twee congruente rechthoekige driehoeken AFG en *afg*.

Fig. 11.



§ 15. STELLING. *Beschrijft men op AB als middellijn een halven cirkel* (zie fig. 12), *trekt men door A en B de lijnen AE en BD rechthoekig op de middellijn, trekt men vervolgens de lijn DE en in het snijpunt F van deze lijn met de kromme lijn*

een loodlijn op DE, die AB ontmoet in C, dan is AE × BD = AC × BC. (Pappus.)

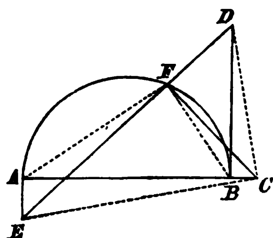


Fig. 12.

Bewijs. Opdat

$$AE \times BD = AC \times BC$$

is noodig en voldoende, dat

$$AE : BC = AC : BD.$$

Daar de driehoeken AEC en BCD rechthoekig zijn in A en B, is het voor de geldigheid van de laatste evenredigheid noodig en voldoende, dat die twee driehoeken gelijkvormig zijn, of dat $\angle$ ACE = $\angle$ BDC of dat $\angle$ ACE + $\angle$ BCD = 90° of dat $\angle$ ECD recht is. Nu kan om vierhoek BCDF een cirkel worden beschreven, daar de hoeken CFD en CBD recht zijn. Hoek DCB is dus het supplement van $\angle$ BFD en bijgevolg gelijk aan BFE. Op dezelfde wijze blijkt dat $\angle$ ACE = $\angle$ AFE; zoodat de som van $\angle$ BCD en $\angle$ ACE of $\angle$ DCE gelijk is aan de som van $\angle$ BFE en $\angle$ AFE of hoek AFB. En hoek AB is recht, zoodat de eigenschap bewezen is.

§ 16. Bij de bovenstaande voorbeelden was het mogelijk, het werkstuk terug te brengen tot een ander, waarvoor men de constructie rechtstreeks kon uitvoeren. Bij andere vraagstukken moet men soms het werkstuk terugbrengen tot een ander, dat men op zijn beurt weer terugbrengt tot een ander, enz.

Wordt bv. gevraagd, *een rechte lijn te trekken, waarvan door twee cirkels koorden van gegeven lengte worden afgesneden*, dan merkt men vooreerst op, dat alle gelijke koorden van een zelfden cirkel raken aan een concentrischen cirkel, en dat omgekeerd alle koorden, die raken aan zulk een concentrischen cirkel, gelijk zijn. Elk der gegeven cirkels kan dus vervangen worden door een concentrischen cirkel, waaraan de gevraagde lijn moet raken. Het werkstuk is dus teruggebracht tot dit andere: *aan twee bekende cirkels een gemeenschappelijke raaklijn te trekken.* En het laatste wordt op zijn beurt teruggebracht tot dit andere: *uit een punt buiten een cirkel een raaklijn te trekken aan dien cirkel.*

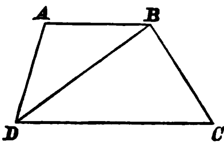
Opmerkelijk is het beschrijven van een cirkel, die raakt aan drie gegeven cirkels. Dit kan men terugbrengen tot het beschrijven van een cirkel, die door een gegeven punt gaat en

raakt aan twee gegeven cirkels. Het laatste kan worden teruggebracht tot het beschrijven van een cirkel, die door 2 gegeven punten gaat en aan een gegeven cirkel raakt. Dit werkstuk wordt op zijn beurt teruggebracht tot het beschrijven van een cirkel, waarvan men drie punten kent.

§ 17. Daar men bij het toepassen der analytische methode een vraagstuk terugbrengt, *reduceert*, tot een ander, noemt men haar ook de methode bij *reductie*. Ook kan men zeggen, dat een vraag vervangen wordt door een andere, zoodat deze als het ware *de plaats inneemt* van de eerste. Van daar dat men de analytische methode ook de methode door *substitutie* noemt.

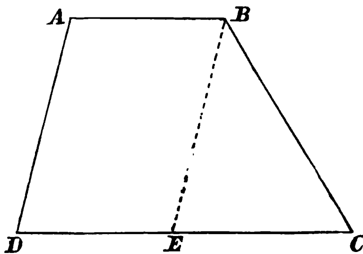
§ 18. Bij vele gevallen, waarin men de analytische methode toepast tot het oplossen van werkstukken, valt op te merken, dat men de vraag tracht terug te brengen tot het construeeren van een driehoek, waarvan drie elementen bekend zijn. De hulplijnen, die men daartoe trekt, zijn veelal evenwijdig aan lijnen, die reeds voorkomen in de als bekend aangenomen figuur.

Fig. 13.



Men heeft hierbij het voordeel, dat men terstond gelijke hoeken en gelijke lijnen krijgt. Wordt bv. gevraagd, een trapezium te construeeren, waarvan de vier zijden gegeven zijn, en men wil de vraag door het trekken van een of twee diagonalen terugbrengen tot het construeeren van een driehoek, dan blijkt, dat er geen driehoek ontstaat, waarvan drie elementen bekend zijn. Trekt men echter de lijn BE evenwijdig aan AD, dan blijkt, dat van den driehoek BEC drie zijden bekend zijn, nl.

Fig. 14.



BC
BE = AD
EC = DC — AB.

Bij het construeeren van rakende cirkels valt op te merken, dat een cirkel, die raakt aan een anderen, tevens raakt aan de raaklijn, die in het raakpunt aan den tweeden cirkel wordt getrokken en omgekeerd. Moeten wij wij dus een cirkel beschrijven die o. a. aan de voorwaarde voldoet, dat hij een gegeven cirkel raakt in een gegeven

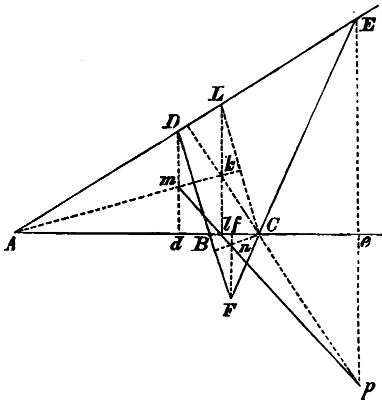
punt, dan kan men dezen cirkel vervangen door zijn raaklijn in het gegeven punt. Door dit op te merken, kunnen wij de volgende werkstukken gemakkelijk oplossen.

a. Een cirkel te beschrijven, die een gegeven cirkel raakt in een gegeven punt en bovendien aan een gegeven rechte lijn raakt.

b. Beschrijf in een gegeven cirkelsector een cirkel.

§ 19. STELLING. ***De vier zijden van een vierhoek, drie aan drie genomen, vormen vier driehoeken; de snijpunten der 3 hoogtelijnen van deze driehoeken vormen vier punten, die in één rechte lijn liggen.***

Fig. 15.



Zij ACFD de vierhoek.

Laat m, n, p de snijpunten zijn van de hoogtelijnen der driehoeken ABD, BCF en ACE, dan is het voldoende om te bewijzen, dat die 3 punten in één rechte lijn liggen. Trekken wij de lijn CL evenwijdig aan BD, en construeeren wij het snijpunt k der hoogtelijnen van driehoek ACL. Noemen wij d, l, e, f de voetpunten der loodlijnen uit D, L, E en F neergelaten op AC. — Het is gemakkelijk om te doen zien, dat A, m en k in één rechte lijn liggen; evenzoo p, C en k; en dat de lijn mk evenwijdig is met Cn. Het is dus om te bewijzen, dat m, n en p in één rechte lijn liggen, voldoende te bewijzen, dat

$$km : \mathrm{C}n = kp : \mathrm{C}p.$$

Maar de evenwijdige lijnen km en Cn, alsmede de stukken kp en Cp van een zelfde rechte lijn verhouden zich als hun projecties op AC, zoodat men heeft

$$km : \mathrm{C}n = dl : \mathrm{C}f \text{ en } kp : \mathrm{C}p = el : e\mathrm{C}.$$

Het is dus voldoende om te bewijzen, dat

$$dl : \mathrm{C}f = el : e\mathrm{C} \text{ of } ld : le = \mathrm{C}f : \mathrm{C}e.$$

Maar men heeft $ld : le = \mathrm{LD} : \mathrm{LE}$ en $\mathrm{C}f : \mathrm{C}e = \mathrm{CF} : \mathrm{CE}$, zoodat men slechts behoeft te bewijzen

$$\mathrm{DL} : \mathrm{LE} = \mathrm{FC} : \mathrm{CE}$$

en dit is waar, omdat CL evenwijdig loopt aan BD of FD.

Bij het toepassen der analytische methode tot het bewijzen van stellingen is dikwijls noodig, evenals bij de toepassing dier methode op werkstukken, dat men hulplijnen trekt. Ook hierbij moet men dan zorg dragen, dat er zooveel mogelijk figuren ontstaan, waarvan men verschillende eigenschappen kent, zooals driehoeken, bij voorkeur rechthoekige of gelijkbeenige, parallelogrammen, gelijkbeenige trapeziums, enz.

Moet bewezen worden, dat vier punten op een cirkelomtrek liggen, dan denkt men al spoedig aan den vorm: bewijs dat om den vierhoek, die de punten tot hoekpunten heeft, een cirkel kan worden beschreven. Om dit te bewijzen, is het in vele gevallen het best, dat men aantoont, dat twee overstaande hoeken van dien vierhoek elkaars supplement zijn, of ook dat in vierhoek ABCD hoek ACB = hoek ADB.

§ 20. De methode der limieten. Daar de som van eenige veranderlijke getallen, die ieder tot een bepaalde limiet naderen, tot limiet heeft de som der limieten van de termen, en hetzelfde geldt voor de andere bewerkingen der rekenkunde, zullen de betrekkingen, die er tusschen twee of meer veranderlijke grootheden bestaan, ook voor haar limieten gelden. Van deze omstandigheid kan men gebruik maken bij het bewijzen van meetkundige eigenschappen. Moet men nl. een betrekking bewijzen tusschen eenige grootheden, die de limieten zijn van andere meer eenvoudige grootheden, dan kan men nagaan of de betrekking geldt voor die meer eenvoudige maar veranderlijke grootheden. Zoo ja, dan is daarmee de verlangde eigenschap bewezen. Op deze wijze handelende, past men de methode der limieten toe. Wij hebben hiervan een voorbeeld gezien bij het bewijzen der eigenschap, dat de oppervlakken van twee cirkels evenredig zijn met de vierkanten van hun stralen.

De methode der limieten bestaat in het terugbrengen van een eigenschap tot een andere en is dus een onderdeel van de analytische methode, als men haar toepast tot het oplossen van vraagstukken op de manier, die wij zooeven aanwezen.

§ 21. Het bewijs uit het ongerijmde. Wordt gevraagd een eigenschap te bewijzen, die de omgekeerde is van een andere reeds bewezen eigenschap, dan kan men de eerste dikwijls uit

het ongerijmde bewijzen. Wil men nu een eigenschap bewijzen, waarvan het omgekeerde niet reeds vroeger bewezen is, dan komt men soms het best tot zijn doel, door eerst die omgekeerde eigenschap te bewijzen, indien ze waar is, en vervolgens de voorgestelde eigenschap. Men brengt zoodoende de eigenschap terug tot een andere en past dus de analytische methode toe op het oogenblik, dat men van een eigenschap overgaat tot haar omgekeerde. Dit valt het best in 't oog, als men het bewijzen uit het ongerijmde door middel van de omgekeerde eigenschap tot een algemeenen regel maakt, zooals *Vincent* dat heeft gedaan.

Moet bv. bewezen worden, *dat een driehoek rechthoekig is, als het vierkant van zijn grootste zijde gelijk is aan de som der vierkanten van de beide andere zijden*, dan kunnen we op de volgende wijze handelen.

We merken op, dat het omgekeerde van die eigenschap waar is nl., dat in een rechthoekigen driehoek het vierkant der grootste zijde gelijk is aan de som der vierkanten van de beide genoemde zijden.

Bovendien hebben we: In een stomphoekigen driehoek is het vierkant der grootste zijde grooter dan de som der vierkanten op de andere zijden.

In een scherphoekigen driehoek is het vierkant der grootste zijde kleiner dan de som der vierkanten van de beide andere zijden.

We hebben dus, wnnneer a de grootste zijde van een driehoek is:

1°. Als de drieh. rechth. is, heeft men $a^2 = b^2 + c^2$
2°. „ „ „ stomph. „ „ „ $a^2 > b^2 + c^2$
3°. „ „ „ scherph. „ „ „ $a^2 < b^2 + c^2$

Weet men nu, dat $a^2 = b^2 + c^2$, dan moet de driehoek rechthoekig zijn, want hij is òf rechthoekig, òf stomphoekig, òf scherphoekig. Stomphoekig kan hij niet zijn, omdat dit in strijd is met 2°, en scherphoekig kan hij niet zijn, omdat dit in strijd is met 3°. Hij moet dus rechthoekig zijn.

Geheel op dezelfde manier blijkt, dat de omgekeerden van 2° en 3° ook waar zijn.

Om de bovenstaande redeneeringen te kunnen toepassen, is noodig en voldoende *a*: dat men van de eerst bewezen eigen-

schappen alle gevallen heeft gehad, en *b*: dat men in elk geval uit de onderstelling een gevolg afleidt, dat in strijd is met de gevolgen der andere onderstellingen.

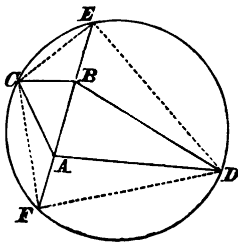
Men kan deze voorwaarden algemeen in woorden brengen, aldus: *Als men bij een eigenschap of bij een reeks van eigenschappen bij het onderstelde alle gevallen heeft onderscheiden, en men is daarbij gekomen tot gevolgen, waarvan elk al de overigen buitensluit, dan zijn de omgekeerde eigenschappen ook waar.*

Wil men nu dien regel toepassen, dan moet men om een eigenschap te bewijzen zeggen: om deze eigenschap te bewijzen moeten we bij de omgekeerde eigenschap alle gevallen opmerken ten opzichte der onderstelling, die gevallen afzonderlijk bewijzen en zien of we daarbij tot gevolgen komen, waarvan elk al de overige buitensluit. Het bewijzen eener eigenschap wordt dus teruggebracht tot het bewijzen van twee of meer andere.

§ 22. We onderstelden hierboven, dat tot het leveren van een bewijs uit het ongerijmde gebruik werd gemaakt van de omgekeerde eigenschap. Dit is evenwel niet altijd het geval, zooals blijkt uit het bewijs der eigenschap, dat men uit een punt buiten een rechte lijn geen twee loodlijnen op die lijn kan neerlaten. Ook in dit geval brengt men het bewijs van een eigenschap terug tot het bewijzen van iets anders.

§ 23. Stelling. *Als een cirkelomtrek gegeven is met twee punten er binnen, zullen de snijpunten van dien cirkelomtrek met een tweeden omtrek, die door de gegeven punten gaat en de gegeven kromme lijn snijdt, beide aan denzelfden kant liggen van de rechte lijn die door de gegeven punten gaat.*

Fig. 16.



Laat A en B de gegeven punten zijn binnen den cirkel CED. Willen wij de stelling bewijzen door middel van de fig. die ontstaat, als men door A en B een cirkelomtrek brengt, die den gegevenen snijdt, dan is het moeilijk om het gestelde, dat nl. de twee snijpunten aan denzelfden kant van AB liggen, behoorlijk af te scheiden van het gegevene; omdat de figuur terstond doet in 't oog vallen, dat de snij-

punten der twee kromme lijnen aan een zelfden kant van AB liggen. Om dat bezwaar ter zijde te stellen, trachten wij een bewijs uit het ongerijmde te geven. We onderstellen dus, dat een cirkelomtrek door A en B gaande, den gegeven cirkelomtrek snijdt in twee punten C en D, die aan verschillende kanten van AB liggen. We kunnen nu redeneeren over een figuur, waarin alleen bekende dingen zichtbaar zijn. Als er een cirkelomtrek kon gaan door A, D, B en C, zou ADBC een ingeschreven vierhoek zijn. Dan was dus $\angle ACB + \angle ADB = 180°$. Maar omdat A en B binnen den cirkelomtrek liggen, heeft men

$$\angle ACB < \angle FCE \text{ en}$$
$$\angle ADB < \angle FDE$$
$$\angle ACB + \angle ADB < \angle FCE + \angle FDE$$
$$\text{of } \angle ACB + \angle ADB < 180°.$$

Dit is echter in strijd met de gelijkheid

$$\angle ACB + \angle ADB = 180°,$$

die we vroeger vonden. De snijpunten C en D van de twee kromme lijnen kunnen dus niet aan verschillende kanten van AB liggen, zoodat zij aan een zelfden kant van AB moeten liggen.

§ 24. STELLING. *Twee omgeschreven veelhoeken van hetzelfde aantal zijden zijn congruent, als de afstanden van hun hoekpunten tot de middelpunten der ingeschreven cirkels twee aan twee gelijk zijn en op dezelfde wijze op elkaar volgen.*

BEWIJS. Zijn de veelhoeken congruent, dan zijn de stralen der ingeschreven cirkels gelijk, en omgekeerd als deze stralen gelijk zijn, moeten de veelhoeken congruent wezen, omdat zij alsdan bestaan uit een zelfde aantal rechthoekige driehoeken, die twee aan twee congruent zijn en op dezelfde wijze aan elkaar sluiten. Het is dus voldoende om te bewijzen, dat de stralen R en r der twee cirkels gelijk zijn.

Onderstellen wij, dat de stralen R en r der twee veelhoeken, die wij ABC . . . L en abc . . . l noemen, ongelijk zijn. Laten wij uit de middelpunten M en m loodlijnen MP, MQ . . . mp, mq, . . . neer op de zijden AB, BC, . . . ab, bc, . . . en vereenigen wij de hoekpunten van elken veelhoek met het middelpunt van zijn ingeschreven cirkel. De driehoeken MAP en map hebben de schuine zijden MA en ma gelijk, en MP $>$ of $<$ mp.

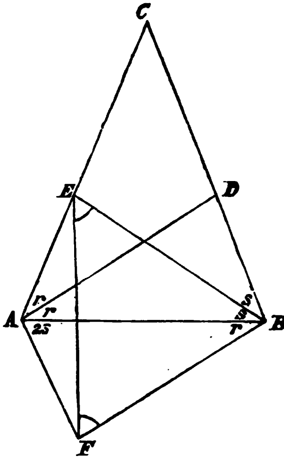
Hieruit zou volgen $\angle$ AMP $<$ of $>$ *amp*
Evenzoo $\angle$ BMP $<$ of $>$ *bmp*

samen $\angle$ AMB $<$ of $>$ *amb*.
Evenzoo $\angle$ BMC $<$ of $>$ *bmc*
$\angle$ CMD $<$ of $>$ *cmd*
. . . .

Telt men al deze ongelijkheden samen, dan vindt men, dat de som der hoeken om het punt M verschillend zou zijn van de som der hoeken om het punt *m*, en dit is ongerijmd, daar elk dier sommen 360 graden is. Men moet dus hebben R $=$ *r*, en hiermede is de stelling bewezen.

§ 25. STELLING. *Twee ingeschreven veelhoeken van hetzelfde aantal zijden zijn congruent, als de afstanden van de middelpunten der omgeschreven cirkels tot de zijden twee aan twee gelijk zijn en op dezelfde wijze op elkaar volgen.*

Fig. 17.



Deze stelling wordt geheel op dezelfde manier bewezen als die der vorige §.

§ 26. STELLING. *Als de rechte lijnen, die twee hoeken van een driehoek middendoor deelen en gemeten worden tot aan de overstaande zijden, gelijk zijn, dan zijn die overstaande zijden ook gelijk.*

Zij gegeven AD $=$ BE, dan moeten we bewijzen $\angle r = \angle s$. Trekken we BF evenwijdig aan AD en AF evenwijdig aan BD. Er ontstaat dan een parallelogram ADBF, waarin BF $=$ AD $=$ BE. Trekken we nu EF, dan is $\angle$ BEF $=$ $\angle$ BFE. Onderstellen wij nu, dat $r > s$. De driehoeken ABE en ABF hebben dan twee zijden gelijk en den ingesloten hoek ongelijk, zoodat AF $>$ AE.

Uit $r > s$ volgt $2r + s > 2s + r$
$180 - (2r + s) < 180 - (2s + r)$
$\angle$ AEB $<$ $\angle$ AFB
Neemt men hier af $\angle$ FEB $=$ $\angle$ EFB
dan blijft er $\angle$ AEF $<$ $\angle$ AFE
en hieruit zou volgen AF $<$ AE,

wat in strijd is met de vroeger gevonden ongelijkheid AF > AE. De onderstelling $r > s$ leidt ons dus tot een ongerijmdheid, zoodat $r = s$, $2r = 2s$ en BC = AC.

Opmerkingen. 1. We hebben hier het bewijs der stelling, dat twee zijden van een driehoek gelijk zijn, teruggebracht tot de stelling, dat de overstaande hoeken gelijk zijn.

2. Het trekken van de lijn BF = AD is natuurlijk, omdat daardoor een driehoek BEF gevormd wordt, waarin men kan gebruik maken van het gegeven BE = AD. In 't algemeen kan men zeggen: bij het bewijzen van een stelling of het oplossen van een werkstuk houdt men steeds alle gegevens in het oog en zorge men, dat alle gegevens minstens eenmaal gebruikt worden. Zonder dit kan men het bewijs of de oplossing niet vinden, tenzij overbodige gegevens voorkomen.

3. Een ander bewijs van bovenstaande eigenschap vindt men in § 31.

§ 27. Vraagstukken. 1. Een driehoek te construeeren, waarvan de hoeken aan de grondlijn en de som der opstaande zijden gegeven zijn.

2. Een driehoek te beschrijven, waarvan gegeven zijn twee hoeken en het verschil der overstaande zijden.

3. Beschrijf een rechthoekigen driehoek, waarvan men de schuine zijde en de som der rechthoekszijden heeft gegeven.

4. Trek in een driehoek ABC evenwijdig aan AB een lijn PQ, die van AC een stuk AP afsnijdt, dat gelijk is aan PQ.

5. Trek in driehoek ABC een lijn DE evenwijdig aan AB, zóó, dat AD + BE = DE.

6. Trek in driehoek ABC een lijn KL evenwijdig aan AB zóó, dat KL = AK — BL.

7. Door het snijpunt van twee cirkels een rechte lijn te trekken, waarvan door de twee cirkels koorden werden afgesneden, wier verhouding gegeven is.

8. Een rechte lijn te trekken, die op gegeven afstanden verwijderd is van twee gegeven punten.

9. Construeer een driehoek, waarvan de 3 zwaartelijnen gegeven zijn.

10. Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn, de som der opstaande zijden en het verschil der hoeken aan de grondlijn. *Ex. Milit. Akad.* 1886.

11. Construeer een driehoek, waarvan gegeven is de grondlijn, de tophoek en de som der hoogtelijnen op de beenen.

12. Uit een punt buiten een cirkel een snijlijn naar den cirkel te trekken, zóó dat het stuk, dat binnen den cirkel ligt, gelijk is aan het stuk, dat er buiten valt.

13. Twee cirkels, met verschillende stralen beschreven, snijden elkander. Trek door een der snijpunten een rechte lijn, zóó dat de koorden in beide cirkels even lang zijn.

14. Beschrijf in een driehoek een parallelogram, waarvan de hoeklijnen evenwijdig loopen met twee zijden van den driehoek.

15. Beschrijf een driehoek, als gegeven zijn: de tophoek en de sommen van elk der opstaande zijden met de grondlijn.

16. Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn: de tophoek en de verschillen van elk der beenen met de grondlijn.

17. Men vraagt een vierhoek te beschrijven, waarvan de vier zijden gegeven zijn en de hoek, waaronder de verlengden van twee overstaande zijden elkaar snijden.

HET OPLOSSEN VAN MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN DOOR TOEPASSING DER ALGEBRA.

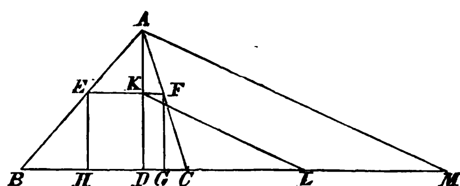
---

§ 28. Wil men de algebra toepassen tot het oplossen van werkstukken, dan onderstelt men, dat de figuur reeds geconstrueerd is en dat de verschillende lijnen in getallen zijn uitgedrukt. De bekende en een of meer onbekende lijnen worden door letters voorgesteld, die de getallen aanduiden, waarin de lijnen zijn uitgedrukt. Tusschen de bekende en de onbekende lijnen zoekt men door middel van meetkundige eigenschappen een of meer betrekkingen of vergelijkingen op. Die vergelijkingen worden opgelost en de waarden, die men voor de onbekenden vindt, geconstrueerd.

§ 29. WERKSTUK. *In een gegeven driehoek een vierkant te beschrijven.*

Onderstellen wij, dat het werkstuk opgelost zij en dat EFGH het verlangde vierkant is, beschreven in dr. ABC. Duiden wij de zijden van den driehoek op de gewone manier aan door a, b en c, zijn hoogte AD door h en de zijde van het vierkant door x. We hebben dan AK $= h—x$, en daar EF evenwijdig loopt aan BC,

Fig. 18.



$$AK : AD = EF : BC, \text{ of}$$

$$(h—x) : h = x : a,$$

$$\text{zoodat } ah—ax = hx.$$

Hieruit volgt $x = ah : (a + h)$. De zijde van het kwadraat is dus de vierde evenredige tot $a + h$, a en h. Om haar te construeeren, nemen we op de grondlijn BC van D af een stuk

DL $= a$ en daarnaast een stuk LM $= h$. We vereenigen M met A en trekken LK evenwijdig aan MA. DK is dan gelijk aan de zijde van het vierkant, waarvan men de zijde EF vervolgens vindt, door een rechte lijn EKF te trekken, die evenwijdig loopt met BC.

Bespreking. Daar $a + h$ grooter is dan a, vindt men voor x een waarde

$$ah : (a + h) < ah : a \text{ of } h.$$

Hieruit blijkt, dat met de zijde a een vierkant overeenkomt. Op dezelfde wijze kan men op elk der twee andere zijden een vierkant plaatsen. Bij een scherphoekigen driehoek vindt men 3 onderscheiden vierkanten, die geheel binnen den driehoek vallen. Bij een rechthoekigen driehoek vallen 2 van de drie vierkanten samen. Bij een stomphoekigen driehoek valt het vierkant, waarvan een zijde in de grootste zijde van den driehoek ligt, binnen den driehoek. De andere twee vierkanten vallen gedeeltelijk buiten den driehoek en voldoen slechts in zooverre aan het gestelde, dat hun hoekpunten in de zijden van den driehoek *of in haar verlengden* liggen. Onderstelt men echter, dat de verlengden der zijden buitengesloten zijn, dan voldoet bij een stomphoekigen driehoek slechts 1 vierkant aan het vereischte.

De vraag doet zich nu voor, of die vierkanten gelijk zijn. Om dit te onderzoeken, noemen wij de hoogtelijn, die op b valt, k, dan is de zijde van het vierkant, dat op b staat, gelijk aan

$$bk : (b + k).$$

Om nu te zien, welk der twee vierkanten het grootst is, merken wij op, dat $ah = bk$, zoodat men het grootste vierkant krijgt, waar de deeler $a + h$ of $b + k$ het kleinste is. Onderstellen wij nu, dat $a < b$. Uit $ah = bk$ volgt

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{h} = \frac{a-k}{b-h} \text{ en dus}$$

$$a - k < b - h$$

$$a + h < b + k,$$

zoodat het grootste vierkant op de kleinste zijde staat.

§ 30. We hebben van het oplossen van werkstukken door middel der algebra verschillende voorbeelden gegeven in „Nieuw Leerboek der Vlakke Meetkunde," Zevende druk, bl. 172—178.

Hier zullen we laten zien, dat men de algebra ook kan aanwenden tot het bewijzen van meetkundige eigenschappen. Daarbij handelt men gewoonlijk op de volgende wijze.

Men berekent in bekende of onbepaalde getallen de lijnen of de verhoudingen, waarvan sprake is in de stelling, en past ten slotte op de gevonden vormen de aangewezen betrekkingen toe. Daarbij moet men dan, als de stelling waar is, twee gelijke uitkomsten vinden of een identieke vergelijking.

§ 31. STELLING. *Twee zijden van een driehoek zijn even lang, als de rechte lijnen, welke de overstaande hoeken middendoor deelen en gemeten worden tot aan die twee zijden, gelijk zijn.*

BEWIJS. Als a en b die twee zijden zijn, drukt men de lengten der lijnen, die $\angle$ A en $\angle$ B middendoor deelen, uit in a, b en c. Men vindt voor de kwadraten van die lijnen (Zie Handboek meetk. IV, § 35).

$$bc \times \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} \text{ en } ac \times \frac{(a+c)^2 - b^2}{(a+c)^2}.$$

Het is nu de vraag, of uit de gelijkheid van deze twee uitdrukkingen voortvloeit $a = b$. Uit die gelijkheid volgt

$$b\,(b+c)^2\,(a+c)^2 - ba^2\,(a+c) = a\,(a+c)^2\,(b+c)^2 - ab^2\,(b+c)^2$$

of als wij alle termen in het tweede lid overbrengen

$$(a-b)\,(a+c)^2\,(b+c)^2 + ab\,[a\,(a+c)^2 - b\,(b+c)^2] = 0$$

$$(a-b)\,(a+c)^2\,(b+c)^2 + ab\,[a^3 - b^3 + 2\,(a^2 - b^2)\,c + (a-b)\,c^2] = 0$$

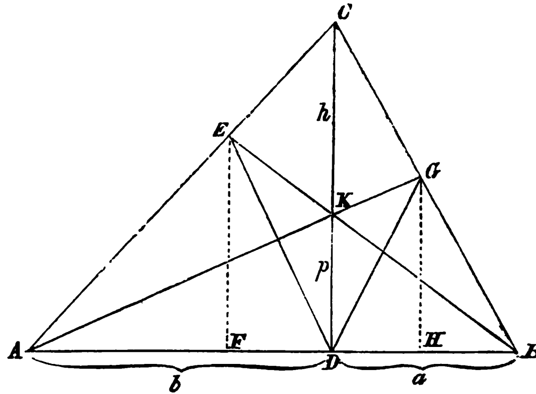
$$(a - b\,[\,(a+c)^2\,(b+c)^2 + ab\,(a^2 + ab + b^2) + 2\,ab\,(a+b)\,c + abc^2] = 0.$$

Het produkt van $a - b$ met een anderen factor moet nul zijn, en daar de tweede factor niet nul is, moet $a - b$ nul zijn of $a = b$.

OPMERKING. Het valt aan dit voorbeeld duidelijk in 't oog, dat de analytische methode toegepast is. Ook het oplossen van vergelijkingen, waartoe men bij de toepassing der algebra op meetkundige werkstukken gewoonlijk komt, is een analytische handelwijze.

§ 32. STELLING. *Uit de hoekpunten A en B van een driehoek ABC trekt men door een zelfde punt K van de hoogtelijn CD twee rechte lijnen AG en BE naar de overstaande zijden. Vereenigt men nu E en G met D, dan maken ED en GD gelijke hoeken met AB.*

Fig. 19.



Om de stelling te bewijzen, is het voldoende aan te toonen, dat de evenredigheid EF : FD = GH : DH waar is.

Om dit te onderzoeken, drukken we de 4 termen van die evenredigheid uit in $BD = a$, $AD = b$, $DK = p$, en $CD = h$.

Om DF en EF te berekenen, hebben we

$$DF : p = FB : DB \qquad \text{en } EF : h = AF : AD$$

$$\text{of } EF : p = (FD + a) : a \text{ en } EF : h = (b - FD) : b$$

$$\text{Dus } a \times EF = p \times FD + ap \text{ en } b \times EF = bh - h \times DF.$$

Vermenigvuldigen we de leden der eerste van deze 2 verg. met b en die van de tweede met a, dan komt er

$$ab \times EF = bp \times FD + abp$$
$$ab \times EF = abh - ah \times DF$$
$$0 = (abp - abh) + (bp + ah)\, DF$$
$$DF = ab \times \frac{h - p}{bp + ah}$$
$$a \times EF = abp \times \frac{h-p}{bp + ah} + ap,$$

waaruit
$$EF = ph \times \frac{a + b}{bp + ah}$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$\text{DH} = ab \times \frac{h - p}{ap + bh} \text{ en } \text{GH} = ph \times \frac{a + b}{ap + bh}$$

Snbstitueeren we de 4 gevonden waarden in de evenredigheid EF : FD = GH : DH, dan komt er

$$ph \frac{a + b}{bp + ah} : ab \frac{h - p}{bp + ah} = ph \frac{a + b}{ap + bh} : ab \frac{h - p}{ap + bh}$$

Hierbij is het produkt der uiterste termen gelijk aan het produkt der middelste. De evenredigheid is dus waar, en de stelling is hiermede bewezen.

§ 33. Vraagstukken. 1. Construeer een rechthoekigen driehoek, waarvan gegeven is de som der rechthoekszijden en de schuine zijde.

2. Construeer een rechthoekigen driehoek, waarvan de hoogtelijn op de schuine zijde en de som der rechthoekszijden gegeven zijn.

3. In een halven cirkel wordt op de middellijn AB een loodlijn CD opgericht, die den omtrek snijdt in D. Op de deelen AC en BC van de middellijn worden halve cirkels beschreven, die binnen den gegeven halven cirkel liggen. Beschrijft men nu twee cirkels, die ieder den grooten halven cirkel, de loodlijn en een der twee kleine halve cirkels raken, dan zijn die twee cirkels even groot. Bewijs dit.

(*Archimedes*, *Lemna* 5.)

4. Een driehoek te beschrijven, waarvan 2 zijden gegeven zijn en de rechte lijn, die den ingesloten hoek middendoor deelt.

DE SYNTHETISCHE METHODE.

§ 34. Bij de synthetische methode gaat men uit van eigenschappen, waarvan de waarheid bekend is, en leidt er een andere als gevolg uit af, uit deze weer een andere, en zoo voort. Van de laatste eigenschap en vau elk der voorafgaande behalve de eerste zegt men dan, dat zij synthetisch bewezen zijn.

Dit zelfde geldt ook voor constructiën volgens de synthetische methode.

In de vlakke meetkunde worden eenige constructies zuiver synthetisch gegeven. Zoo wordt de constructie van een driehoek, waarvan twee zijden en de ingesloten hoek gegeven zijn, zuiver synthetisch behandeld. Evenzoo het construeeren van een driehoek, waarvan een zijde en de aanliggende hoeken gegeven zijn.

Wordt gevraagd een vierhoek te construeeren, waarvan drie zijden in de ingesloten hoeken gegeven zijn, dan lost men dat werkstuk geheel op dezelfde wijze synthetisch op.

Sommige werkstukken zijn zoo eenvoudig, dat men terstond het geheel overziet, en dan is het moeilijk om te zeggen, of men bij de oplossing synthetisch dan wel analytisch heeft gehandeld.

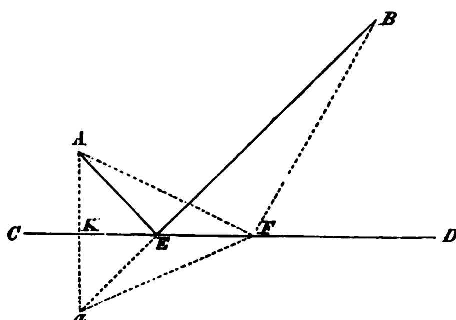
§ 35. Bij werkstukken, waarvan men de oplossing niet terstond inziet, is het in den regel onmogelijk om de synthetische methode toe te passen. Heeft men langs analytischen weg de oplossing gevonden, dan kan men haar vervolgens synthetisch meedeelen. Voor den lezer, die eerst met de synthetische oplossing kennis maakt, is deze echter kunstmatig. De lezer gevoelt zich daarbij te veel in het duister: hij bemerkt ten slotte, dat hij tot zijn doel is geraakt, maar weet niet waarom hij juist den afgelegden weg heeft gekozen. Om dit op te

helderen, geef ik een voorbeeld van een werkstuk, dat eerst synthetisch en vervolgens analytisch wordt opgelost.

Uit twee gegeven punten naar een punt van een gegeven rechte lijn twee andere rechte lijnen te trekken, die gelijke hoeken maken met de gegeven lijn.

SYNTHETISCHE OPLOSSING. Als A en B de gegeven punten en CD de gegeven lijn zijn, laat men uit A een loodlijn AK neer op CD. Het verlengde Ka van die loodlijn maakt men gelijk aan AK en vereenigt a met B. Verbindt men nu nog het snijpunt E van aB en CD met A, dan zijn AE en BE de verlangde lijnen.

Fig. 20.



BEWIJS. $\angle$CEa = $\angle$BED, daar het overstaande hoeken zijn. Verder is $\angle$ AEK = $\angle$ aEK, daar de rechthoekige driehoeken AEK en aEK twee zijden gelijk hebben en dus congruent zijn. We hebben dus $\angle$ AEK = $\angle$ aEK = $\angle$ BED.

ANALYTISCHE OPLOSSING. Onderstellen we, dat E het gezochte punt zij, zoodat $\angle$ AEC = $\angle$ BED. Als BE verlengd is, heeft men $\angle$ KEa = $\angle$ BED en dus ook

$$\angle \text{KE}a = \angle \text{KEA}.$$

Laat men nu uit A de loodlijn AK neer op CD en verlengt men die loodlijn, tot zij het verlengde van BE ontmoet in a, dan hebben de rechthoekige driehoeken AKE en aKE een rechthoekszijde en een scherpen hoek gelijk, zoodat ze congruent zijn. De lijn Ka is dus gelijk aan AK, en dat stelt ons in staat, om a en vervolgens E te vinden.

§ 36. In de vorige § is gebleken, dat de synthetische methode voor het oplossen van werkstukken of het bewijzen van gegeven stellingen uit den aard der zaak gekunsteld is. Het kan echter gebeuren, dat de oplossing wordt gevraagd van een werkstuk, dat veel overeenkomt met een reeds bekend werkstuk en waarvan men terstond inziet, dat de oplossing op dezelfde wijze kan gegeven worden als van dat bekende werkstuk. Bv.

Als een punt en een cirkel gegeven zijn aan denzelfden kant

van een gegeven rechte lijn, vraagt men in die lijn een punt te bepalen, zoodanig dat de gegeven lijn gelijke hoeken maakt met de raaklijn uit dat punt aan den cirkel getrokken en met de vereenigingslijn van dat punt en het gegeven punt.

Oplossing. Laat uit het gegeven punt een loodlijn neer op de gegeven lijn en maak het verlengde van die loodlijn gelijk aan de loodlijn zelf. Trek uit het uiteinde van die verlengde loodlijn raaklijnen aan den cirkel, dan is elk der snijpunten van die raaklijnen met de gegeven lijn een punt, dat aan het vereischte voldoet.

Op dezelfde manier lost men ook het werkstuk op, om *in een gegeven rechte lijn een punt te bepalen, zoodanig dat de gegeven lijn gelijke hoeken maakt met twee raaklijnen uit dat punt aan twee gegeven cirkels getrokken, die aan denzelfden kant der gegeven lijn liggen.*

§ 37. Wanneer de overeenstemming van een werkstuk of een theorema met een reeds bekend werkstuk of theorema ons leidt tot de constructie of het bewijs, zegt men, dat de oplossing gevonden is bij *analogie* of *overeenstemming*. Soms maakt men daarvan een afzonderlijke rubriek en zegt dan, dat het vraagstuk is opgelost volgens *de methode der analogie*. Het komt mij echter niet wenschelijk voor, om aan deze handelwijze den naam van oplossingsmethode te geven. Het is wel een middel, dat ons een oplossing aan de hand kan doen, maar welke methode is toegepast, wordt ons aangewezen door de oplossing zelf en niet door een vingerwijzing, die ons tot de methode heeft geleid.

De overeenstemming der vraagstukken enz. doet ook dienst in het volgende geval. Heeft men den *straal van den ingeschreven* cirkel eens driehoeks berekend uit de drie zijden en er wordt gevraagd, om den *straal van een aangeschreven* cirkel te berekenen uit dezelfde gegevens, dan tracht men de oplossing op dezelfde wijze te geven en dat gelukt ook. Deze twee berekeningen komen in de leerboeken der vlakke meetkunde voor, en men kan zich van de analogie bedienen, om de berekening van den straal eens aangeschreven cirkels heuristisch te behandelen.

§ 38. Aan de handelwijze, die we in § 35 hebben toegepast, wordt ook soms de naam van methode gegeven en wel *methode*

bij symmetrie of duplicatie (verdubbeling). We hebben echter in het oog doen vallen, dat in het door ons gekozen voorbeeld de analytische of synthetische werd toegepast. Het is dus niet wenschelijk, om onder zulk een naam van die handelwijze te spreken. Dit neemt niet weg, dat men die handelwijze meermalen met goed gevolg kan toepassen. Bv.

Een cirkelomtrek te beschrijven, die door een gegeven punt gaat en raakt aan twee gegeven rechte lijnen.

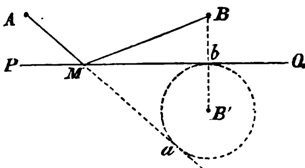
We weten vooreerst, dat het middelpunt van dien cirkel moet liggen in een rechte lijn, die een hoek tusschen de gegeven lijnen middendoor deelt. Nu kennen we van den cirkelomtrek dus een punt en een rechte lijn, waarin zijn middelpunt moet liggen. Maar dan zal een ander punt van dezelfde kromme lijn met het gegeven punt *symmetrisch* moeten liggen ten opzichte van de deellijn.

Nu zijn twee punten van den cirkelomtrek bekend, en we kunnen dus een cirkelomtrek beschrijven, die door twee gegeven punten gaat en raakt aan een gegeven rechte lijn.

We kunnen de handelwijze, waardoor hierboven een tweede punt van den cirkelomtrek werd gevonden, toepassen, zoo vaak van een cirkelomtrek een punt bekend is, terwijl men van een rechte lijn weet, dat zij het middelpunt bevat.

§ 39. WERKSTUK. *Als een rechte lijn gegeven is en twee punten A en B aan denzelfden kant der rechte lijn, vraagt men op die lijn een punt te vinden, zoodanig dat de gegeven rechte lijn met de lijn, die van het gevraagde punt naar A gaat, een tweemaal zoo grooten hoek maakt als met de rechte lijn, die uit het gevraagde punt naar B gaat.*

Fig. 21.

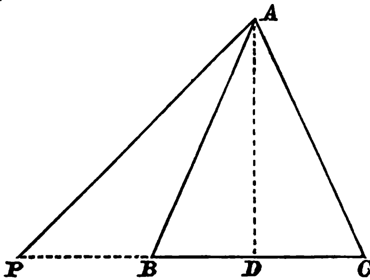


Zij M het gevraagde punt. Men stelle zich voor, dat de figuur wordt doorgevouwen volgens de gegeven lijn PQ, zoodat B in B′ komt. De hoek bMB′ is half zoo groot als ∠ AMP en het verlengde Ma van AM raakt aan den cirkel, die B′ tot middelpunt en B′b tot straal heeft. Men vindt die lijn Aa dus, door uit A een raaklijn te trekken aan den cirkel, die B′ tot middelpunt en B′b tot straal heeft.

§ 40. Naast de verdubbeling, waarvan wij in de vorige pa-

ragrafen spraken, en die van zuiver meetkundigen aard is, staat een andere, die meer van algebraïschen aard is. Zij bv. gevraagd te bewijzen, dat *de tweedemacht der rechte lijn, die het toppunt van een gelijkbeenigen driehoek verbindt met een punt op het verlengde der grondlijn, gelijk is aan de tweedemacht van een been, vermeerderd met het produkt der afstanden van dat punt tot de uiteinden der grondlijn.* Wil men deze stelling bewijzen door toepassing der bekende eigenschappen van de kwadraten der zijden van een scheefhoekigen driehoek, dan passe men, als ABC de gelijkb. driehoek is, deze eigenschap toe op elk der twee driehoeken ABP en ACP, aldus:

Fig. 22.



$$AP^2 = AB^2 + PB^2 + PB \times 2BD$$
$$AP^2 = AC^2 + PC^2 - PC \times 2CD$$

$$2AP^2 = 2AB^2 + PB^2 + PC^2 +$$
$$PB(PC - PB) - PC(PC - PB)$$
$$2AP^2 = 2AB^2 + 2PB \times PC$$
$$AP^2 = AB^2 + PB \times PC.$$

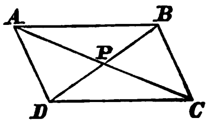
Moet men bewijzen, *dat in een vierhoek de som der diagonalen kleiner is dan de halve omtrek*, dan neme men niet alleen $AP + BP > AB$ en

$CP + DP > CD$,

waaruit men reeds door optelling de som der diagonalen vindt, maar men neme bovendien $AP + DP > AD$ en

$BP + CP > BC$.

Fig. 23.



Door samentelling van deze 4 ongelijkheden vindt men

$$2AC + 2BD > AB + BC + CD + DA$$

en dus $AC + BD >$ de halve omtrek.

Moet men bewijzen, *dat de grondlijn van een driehoek gelijk is aan den afstand van het punt, waarin een opstaande zijde wordt geraakt door den ingeschreven cirkel, tot het punt waarin 't verlengde van die zijde wordt geraakt door den aangeschreven cirkel, die binnen den tophoek ligt*, dan bewijze men, dat twee-

maal de grondlijn gelijk is aan de som der bedoelde afstanden op de twee beenen genomen.

§ 41. Synthetisch is ook de oplossing van een vraagstuk, wanneer men eene ongelijkheid moet bewijzen en daarbij voor de grootheden van het eene lid andere uitdrukkingen in de plaats stelt, en vervolgens dat lid herleidt, tot men aan het andere lid komt.

VOORBEELD. *Bewijs, dat de som der omgekeerden van de stralen der aangeschreven cirkels van een driehoek gelijk is aan het omgekeerde van den straal des ingeschreven cirkels.*

Voor de som der omgekeerden van de stralen der aangeschreven cirkels kan men schrijven

$$\frac{s-a}{O} + \frac{s-b}{O} + \frac{s-c}{O}$$

Deze som is weer gelijk aan $\{3s - (a + b + c)\} : O$ dat is gelijk aan $s : O$, en deze waarde is het omgekeerde van den straal des ingeschreven cirkels.

§ 42. Geheel op dezelfde manier kan men bewijzen, *dat de wortel uit het gedurig produkt van de stralen der in- en aangeschreven cirkels van een driehoek gelijk is aan het oppervlak van den driehoek.* Het verdient echter opmerking, dat men in gevallen als deze zonder veranderingen van wezenlijk belang den analytischen weg kan bewandelen. Men kan dan zeggen: opdat de laatstgenoemde stelling waar zij, is noodig en voldoende, dat

$$\sqrt{\frac{O}{s} \times \frac{O}{s-a} \times \frac{O}{s-b} \times \frac{O}{s-c}} = O, \text{ of dat}$$

$$\sqrt{\frac{O^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = O, \text{ of dat}$$

$$\sqrt{\frac{O^4}{O^2}} = O, \text{ of dat}$$

$$O = O;$$

en daar dit het geval is, moet de stelling waar zijn.

VRAAGSTUKKEN. 1. Bewijs, dat de som der stralen van de aangeschreven cirkels van een driehoek, verminderd met den straal des ingeschreven cirkels, gelijk is aan viermaal den straal des omgeschreven cirkels.

2. Als gegeven zijn twee punten P en R binnen een hoek,

vraagt men op de beenen van dien hoek twee punten A en B zoodanig te bepalen, dat de lengte der gebroken lijn PABR zoo klein mogelijk zij.

3. Gegeven zijn twee punten A en B aan verschillenden kant eener rechte lijn gelegen. In deze een punt C te bepalen, zoo dat hoek ACB wordt middendoor gedeeld door de gegeven lijn.

4. Gegeven twee punten A en B aan verschillenden kant van een rechte lijn. In deze lijn een punt C te vinden zóó, dat het verschil tusschen AC en BC zoo groot mogelijk zij.

§ 43. We hebben hierboven een figuur verdubbeld of als de helft eener symmetrische figuur beschouwd, als de hoeken daar aanleiding toe gaven, als met een gebroken lijn in de figuur een rechte lijn in de verdubbelde figuur overeenkwam.

Is de figuur zelf symmetrisch, dan kan men gewoonlijk met goed gevolg rechtstreeks de synthetische methode toepassen, door de figuur in gedachten op te nemen, om te keeren en in een anderen stand op haar oorspronkelijke plaats te leggen.

Deze handelwijze hebben we in de vlakke meetkunde toegepast, om te bewijzen, dat in een gelijkbeenigen driehoek de grondhoeken gelijk zijn.

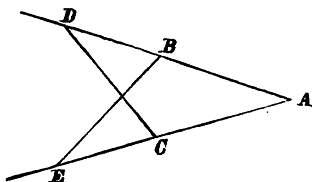
Ook de omgekeerde stelling kan men op die manier rechtstreeks bewijzen.

Een ander voorbeeld is het volgende.

Als op de beenen van een hoek vier punten B, C, D en E zoo genomen worden, dat AB = AC en AD = AE, dan is het snijpunt van BE met CD een punt van de rechte lijn, die hoek A middendoor deelt.

Plaatst men ∠A, na hem omgekeerd te hebben, op zijn eerste plaats, dan valt BE waar eerst CD lag en CD waar eerst BE lag. Het snijpunt van die twee lijnen valt dus, waar het eerst lag, en hieruit volgt, dat het een punt is van de rechte lijn, die hoek A middendoor deelt.

Fig. 24.



Opmerking. Deze eigenschap doet ons een middel aan de hand, om een hoek middendoor te deelen, zonder gebruik te maken van cirkelbogen.

DE METHODE DER MEETKUNDIGE PLAATSEN.

---

§ 44. Door een *meetkundige plaats* verstaat men een figuur, die alle punten bevat, welke een zekere eigenschap bezitten (of m. a. w. aan een zekere voorwaarde voldoen) en geen andere punten. In vele vraagstukken wordt verlangd, de ligging van een punt te bepalen, en andere vraagstukken kunnen gemakkelijk daartoe worden teruggebracht. Om de ligging van een punt in het plat vlak te bepalen, zijn twee voorwaarden noodig. Laat men een der 2 voorwaarden ter zijde, dan is het punt niet meer volkomen bepaald, maar ligt willekeurig in de meetkundige plaats, die overeenkomt met de andere voorwaarde. Laat men de andere voorwaarde ter zijde, dan blijkt, dat het punt moet liggen in een tweede meetkundige plaats Elk snijpunt der beide meetkundige plaatsen is een punt, dat aan het vereischte voldoet.

Lost men een vraagstuk op die wijze op, dan zegt men, *dat de methode der meetkundige plaatsen wordt toegepast.*

§ 45. We willen hier vooreerst eenige meetkundige plaatsen opnoemen, die het meest gebruikt worden.

1. De meetkundige plaats der punten, die op gelijke afstanden verwijderd zijn van twee punten is de onbepaald verlengde rechte lijn die den afstand tusschen de beide punten rechthoekig middendoor deelt.

2. De meetkundige plaats der punten, die op gelijke afstanden verwijderd zijn van een gegeven punt, is een cirkelomtrek.

3. De meetkundige plaats der punten, die op een gegeven afstand verwijderd zijn van een rechte lijn, is een paar rechte lijnen, die aan weerszijden van de gegeven lijn liggen op afstanden gelijk aan den gegeven afstand.

4. De meetkundige plaats der punten, die op gelijke afstan-

den verwijderd zijn van twee elkaar snijdende rechte lijnen, bestaat uit twee rechte lijnen, welke de hoeken tusschen de gegeven lijnen middendoor deelen.

5. De meetk. plaats der toppunten van de driehoeken, die een gegeven grondlijn en gegeven hoogte of gegeven oppervlak hebben, bestaat uit twee rechte lijnen evenwijdig aan de grondlijn.

6. De meetk. plaats der toppunten van de driehoeken, die een gegeven grondlijn hebben, een tophoek van gegeven grootte en aan een zelfden kant van die grondlijn liggen, is een cirkelboog, wiens uiteinden samenvallen met die der grondlijn.

7. De meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die een gegeven straal hebben en uitwendig raken aan een gegeven cirkel, is een cirkelomtrek die concentrisch is met den gegeven cirkel. Evenzoo bij inwendige raking.

8. De meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die een gegeven rechte lijn in een gegeven punt raken, is een rechte lijn, die de eerste in het gegeven punt rechthoekig snijdt.

9. De meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die in een gegeven punt raken aan een gegeven cirkel, is een rechte lijn, die door het gegeven middelpunt en het gegeven raakpunt gaat.

§ 46. Men vindt in elk leerboek der vlakke meetkunde eenige voorbeelden van de toepassing der methode, die we hier bespreken, en wel de volgende:

a. Een gegeven rechte lijn middendoor te deelen.

b. Een driehoek te beschrijven, waarvan de zijden gegeven zijn.

c. Een driehoek te beschrijven, waarvan twee zijden en een hoek tegenover een dier zijden gegeveu zijn.

d. De bepaling van het middelpunt des cirkels, die door drie gegeven punten gaat.

e. Het trekken van een raaklijn aan een cirkel door een punt buiten dien cirkel.

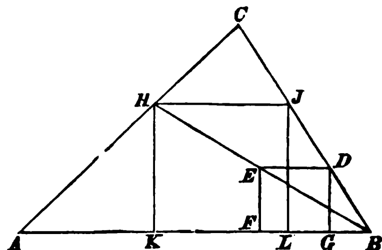
§ 47. Passen wij nu de methode der meetkundige plaatsen toe op eenige voorbeelden.

WERKSTUK. *Een vierkant te beschrijven in een gegeven driehoek.*

Zij ABC de driehoek, en nemen wij aan, dat twee hoek-

punten van het vierkant in de grondlijn AB moeten liggen.

Fig. 25.



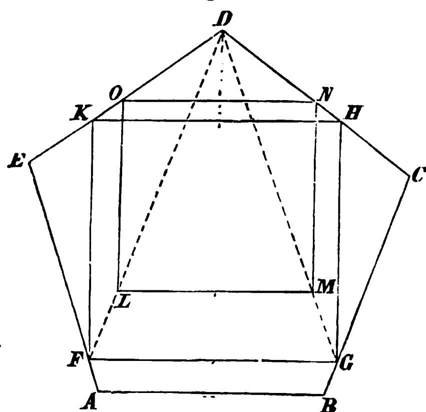
Een der voorwaarden, waaraan het vierkant moet voldoen, is, dat een hoekpunt in de zijde AC moet liggen. Laten wij die voorwaarde weg, dan kunnen we voor het hoekpunt, dat in de zijde BC moet liggen, een willekeurig punt D van die zijde nemen. De loodlijn DG op AB neergelaten is de zijde van een vierkant DEFG, dat aan alle voorwaarden behalve die eene voldoet. Trekken we door B en E een rechte lijn BH, dan zal elk punt van die lijn, dat binnen den driehoek ligt, het hoekpunt zijn van een vierkant, dat aan dezelfde voorwaarden voldoet als die eene. Het punt H, waarin die lijn AC ontmoet, is een hoekpunt van een vierkant HJLK, dat aan de vereischten van het vraagstuk voldoet.

Bewijs. Trekken we HJ evenwijdig aan ED en laten we uit H en J loodlijnen HK en JL neer op AB, dan is

$$HJ : DE = HB : EB$$
$$HK : EF = HB : EB$$
$$\text{En dus } HJ : DE = HK : EF.$$

Daar hierin de tweede en vierde term gelijk zijn, is ook de eerste term gelijk aan den derden of HJ = HK, en hieruit blijkt, dat HJLK een vierkant is.

Fig. 26.



§ 48. Werkstuk. *In een gegeven regelmatigen vijfhoek een vierkant te beschrijven.*

Zij ABCDE de gegeven regelmatige vijfhoek. Trekken we een rechte lijn ON evenwijdig met een zijde AB van den vijfhoek, en beschrijven we op ON als zijde een vierkant ONML, dan ligt dit met 2 hoekpunten in den omtrek des vijfhoeks. Trekt men nu de rechte lijnen DL en DM, dan zijn dit

de meetkundige plaatsen van 2 hoekpunten van vierkanten waarvan de andere hoekpunten in de lijnen DE en DC liggen. Als dit zoo is, dan zijn de snijpunten F en G van DL en DM met AE en BC de hoekpunten van een vierkant, dat aan het gestelde voldoet.

Bewijs. Daar ON evenwijdig loopt met AB en dus ook met EC, is DO = DN. De driehoeken DOL en DMN zijn congruent. Hetzelfde kan men dus zeggen van DEF en DCG. Hieruit volgt, dat AF = BG, zoodat FG evenwijdig loopt met AB en met ON. Trekt men nu FK en GH evenwijdig aan LO en MN, dan zijn ook de driehoeken DFK en DGH congruent. Men heeft dus FK = GH, zoodat FGHK een rechthoek is.

Verder heeft men in de gelijkvormige driehoeken DOL en DKF

$$OL : KF = DL : DF.$$

En in de gelijkvormige driehoeken DLM en DFG heeft men

$$LM : FG = DL : DF.$$

Deze twee evenredigheden hebben de eerste, derde en vierde termen gelijk. Haar tweede termen zijn dus ook gelijk, dat is KF = FG.

Hieruit volgt, dat de rechthoek KFGH een vierkant is.

§ 49. Werkstuk. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven is de grondlijn, de tophoek en de hoogte.*

Neem een rechte lijn AB, die gelijk is aan de gegeven grondlijn. Laten wij nu de voorwaarde, dat de driehoek een gegeven hoogte moet hebben, ter zijde, dan zou het toppunt elk punt van een cirkelboog kunnen zijn, die AB tot koorde heeft. Dien cirkelboog kunnen we construeeren.

Laten we in de tweede plaats de voorwaarde, dat de tophoek een gegeven grootte moet hebben, ter zijde, dan zou het toppunt elk punt van de lijn kunnen wezen, die evenwijdig loopt aan AB, van AB verwijderd is op een afstand gelijk aan de gegeven hoogte en aan denzelfden kant van AB ligt als de cirkelboog. Die lijn kunnen we construeeren.

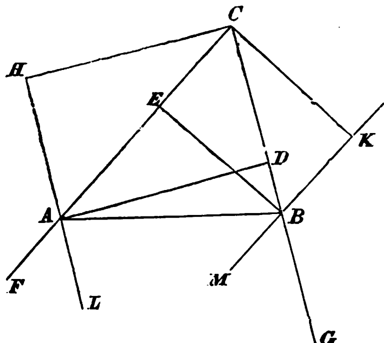
Nu moet het toppunt van den gevraagden driehoek zoowel in deze rechte lijn liggen, als in den cirkelboog, en dus een snijpunt zijn van den cirkelboog met de rechte lijn.

Bespreking. Is er geen snijpunt, dan bestaat er geen driehoek, die aan het vereischte voldoet. Is er een raakpunt, dan

vindt men een gelijkbeenigen driehoek. Zijn er twee snijpunten, dan vindt men twee driehoeken, die alleen in stand verschillen.

§ 50. WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven is een hoek en de hoogtelijnen op de aanliggende zijden.*

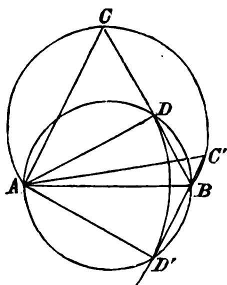
Fig. 27.



Zij FCG de gegeven hoek; CH, die hier loodrecht op CG geplaatst is, de eene hoogtelijn en CK, die hier rechthoekig op FC geplaatst is, de andere hoogtelijn. Een der hoekpunten ligt in het been CF, en daar het van CG moet verwijderd zijn op een afstand gelijk aan CH, ligt het ook in de lijn HL, die door H evenwijdig aan CG is getrokken. Het is dus het snijpunt A van HL met CF. Op dezelfde wijze vindt men het hoekpunt B als het snijpunt van CG met KM, die evenwijdig aan CF getrokken is. Vereenigt men A met B, dan is de driehoek voltooid.

§ 51. WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven is een zijde, de overstaande hoek en de hoogtelijn op een der andere zijden.*

Fig. 28.



Zij AB een lijn, die gelijk is aan de gegeven zijde. Beschrijven wij op AB als koorde een cirkelsegment ACB, dat hoeken bevat gelijk aan den gegeven hoek, dan moet het hoekpunt tegenover AB in den boog van dat cirkelsegment liggen.

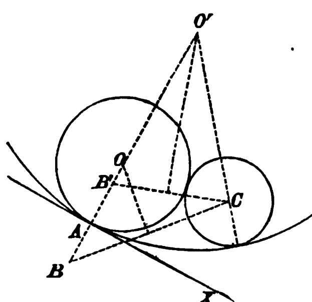
Als A het hoekpunt is, waaruit de gegeven hoogtelijn is neergelaten, dan moet het voetpunt dier hoogtelijn in den cirkelomtrek liggen, die A tot middelpunt heeft en de hoogtelijn tot straal. Maar dat voetpunt moet ook liggen in den cirkelomtrek, die AB tot middellijn heeft. Als die twee cirkels elkaar snijden in D en D', zijn dit de eenige twee punten, waarin het voetpunt der hoogtelijn, uit A

neergelalen, kan liggen. Trekken wij rechte lijnen door B en elk van die twee punten, dan moet het derde hoekpunt in een van die rechte liggen. Maar het derde hoekpunt moet ook in den boog van het segment ACB liggen en is dus een snijpunt van dien boog met een der twee lijnen. Men vindt zoodoende twee driehoeken ABC en ABC′, die aan het vereischte voldoen.

Bespreking. Deze laten we aan den lezer over, die daarbij moet letten op het geval, dat de gegeven zijde gelijk is aan de gegeven hoogte. Ook moet de vraag beantwoord worden, in hoeverre de twee driehoeken, die men kan vinden, verschillen.

§ 52. Werkstuk. *Een cirkel te beschrijven, die aan een gegeven rechte lijn in een gegeven punt en aan een gegeven cirkel raakt.*

Fig. 29.



Zij AX de rechte lijn met het raakpunt A en C de gegeven cirkel. Het komt er nu in de eerste plaats op aan, het middelpunt van den gevraagden cirkel te vinden. Laten wij de voorwaarde ter zijde, dat de gevraagde cirkel moet raken aan den gegeven cirkel, dan houden wij alleen de voorwaarde over, dat de gevraagde cirkel moet raken aan de lijn AX in het punt A. De meetk. plaats van de middelpunten der cirkels, die in A raken aan AX, is de lijn BO′, die AX rechthoekig snijdt in A. Het middelpunt van den gevraagden cirkel moet dus liggen in de lijn BO′.

Merken wij verder op, dat het middelpunt van den gevraagden cirkel van C moet verwijderd zijn op een afstand, gelijk aan den straal van den gevraagden cirkel, vermeerderd of verminderd met den straal van den gegeven cirkel. Nemen we dus AB = AB′ gelijk aan den straal van den gegeven cirkel, dan moet het gevraagde middelpunt op gelijke afstanden verwijderd zijn van C en B of van C en B′. Het moet dus liggen in de rechte lijn, die BC of in de rechte lijn, die B′C rechthoekig middendoor deelt. Die beide deellijnen snijden BO′ in twee punten O en O′, die ieder het middelpunt opleveren van een cirkel, welke aan het vereischte voldoet.

Opmerking. De eerste stap hierboven gedaan is analytisch. Verder wordt synthetisch gehandeld en daarbij maakt men dan gebruik van meetkundige plaatsen.

Vraagstukken. 1. Een cirkelomtrek te beschrijven, die door een gegeven punt gaat, raakt aan een gegeven rechte lijn en een straal van gegeven lengte bezit.

2. Een cirkelomtrek te beschrijven, waarvan de straal gegeven is, en die door twee gegeven punten gaat.

3. In een gegeven cirkelomtrek een punt te bepalen, dat op gelijke afstanden verwijderd is van twee gegeven rechte lijnen.

§ 53. In de voorbeelden, die we hierboven gekozen hebben, konden we rechtstreeks gebruik maken van bekende meetkundige plaatsen. In andere gevallen is het soms noodig, om eerst de meetkundige plaats te bepalen, die overeenkomt met de voorwaarde, waaraan een punt moet voldoen. Men weet dan niet vooruit, of de meetkundige plaats een cirkelomtrek, een begrensde of een onbegrensde rechte lijn of een samenstel van twee of meer dier lijnen, dan wel een andere kromme lijn zal wezen, die niet in de elementaire meetkunde voorkomt. Vaste regels kan men in dit opzicht hier niet geven zooals in de analytische meetkunde. Toch kunnen we eenige opmerkingen aan de hand doen, die hier volgen.

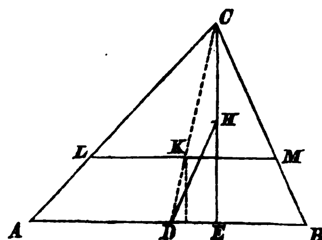
a. Zoodra we een of meer bijzondere punten opmerken, die aan de gestelde voorwaarden voldoen, wijzen we die aan als punten, welke tot de gezochte meetkundige plaats behooren.

Wordt bv. gevraagd de meetkundige plaats van het snijpunt der diagonalen van de rechthoeken, die beschreven zijn in een driehoek en met een zijde in de grondlijn van den driehoek liggen, dan merken we vooreerst op, dat het snijpunt zal samenvallen met het midden der grondlijn op het oogenblik, dat de twee zijden van den rechthoek samenvallen met de grondlijn. Het midden der grondlijn is dus een punt van de meetkundige plaats. Valt de rechthoek samen met de hoogte, dan valt het snijpunt samen met het midden der hoogte. Is de meetk. plaats een rechte lijn, dan is het dus de rechte lijn, die de twee genoemde punten vereenigt; maar dat moet nog nader onderzocht worden.

Zij LM de zijde van een rechthoek beschreven in driehoek ABC, en D het midden van AB. Trekt men CD, dan is K

het midden van LM. Laat men dus uit K een loodlijn neer

Fig. 30.



op AB, dan is het midden dier loodlijn het snijpunt der diagonalen van den rechthoek. Maar die loodlijn wordt door DH middendoor gedeeld, als H het midden is van CE, omdat die loodlijn evenwijdig is met CE, terwijl CH = HE. De middelpunten van alle rechthoeken, die in den driehoek beschreven zijn en waarvan twee hoekpunten in AB liggen, zijn dus in DH gelegen.

b. Vindt men 3 punten der meetkundige plaats, die niet in een rechte lijn liggen, dan weet men dat de meetk. plaats niet een enkele rechte lijn is.

c. Vindt men een of meer punten, die op een onbepaald grooten afstand liggen, dan is de meetkundige plaats niet een cirkel.

§ 54. Ter oefening in het bepalen van meetkundige plaatsen mogen de volgende vraagstukken dienen.

1. De meetkundige plaats te bepalen van de uiteinden der gelijke evenwijdige lijnen, wier aanvangspunten alle op een cirkelomtrek liggen.

2. Bepaal de meetkundige plaats der punten, die men krijgt, als men een zelfde punt vereenigt met de punten van een rechte lijn en de vereenigingslijnen in een bepaalde verhouding verdeelt.

3. Evenzoo voor een cirkel.

4. Bepaal de meetkundige plaats van de zwaartepunten der driehoeken, die in een zelfde cirkelsegment staan.

5. Bepaal de meetkundige plaats van de snijpunten der hoogtelijnen van de driehoeken, die in een zelfde cirkelsegment staan.

6. De meetkundige plaats der middens van de koorden van een cirkel, die gelijke lengte hebben, is een cirkel.

7. Evenzoo voor gelijke raaklijnen.

8. Bewijs, dat de meetkundige plaats der middens van de koorden, die uit een zelfde punt van een cirkelomtrek in dien cirkel getrokken zijn, een cirkelomtrek is, waarvan de middellijn gelijk is aan den straal van den gegeven cirkel.

9. Bepaal ook de meetk. plaats der punten, die men krijgt, als men de koorden in een willekeurige maar standvastige verhouding verdeelt.

10. De meetkundige plaats der punten, die de koorden van een cirkel middendoor deelen, welke door een zelfde punt binnen een cirkel gaan, is een cirkelomtrek.

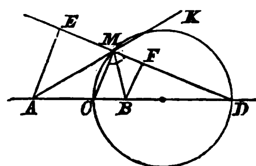
11. De meetkundige plaats van de middens der koorden van een cirkel, wier verlengden alle door een zelfde punt buiten den cirkel gaan, is een cirkelboog.

12. Als de grondlijn van een driehoek gegeven is in grootte en in stand, terwijl het verschil der beenen gelijk is aan een gegeven rechte lijn, vraagt men de meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen uit de uiteinden der grondlijn neergelaten op de rechte lijn, die den tophoek halveert.

§ 55. *De meetkundige plaats te bepalen van de punten, wier afstanden tot twee gegeven punten een gegeven verhouding hebben.*

Laat A en B de gegeven punten zijn, $m : n$ de gegeven verhouding. Bepalen wij vooreerst op AB de punten C en D, wier afstanden tot A en B zich verhouden als m tot n. Zij nu M een ander punt van de meetkundige plaats en vereenigen wij dat met A en B, dan heeft men

Fig. 31.



$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n} = \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB},$$

zoodat de rechte lijnen MC en MD de hoeken BMA en BMK middendoor deelen, waaruit volgt, dat die lijnen rechthoekig op elkaar staan. Maar als hoek CMD recht is, ligt M in den cirkelomtrek, die CD tot middellijn heeft, en wij weten dus, dat alle punten der meetkundige plaats in dien cirkelomtrek liggen.

Omgekeerd zal men voor een willekeurig punt M van dien cirkelomtrek hebben MA : MB $= m : n$.

Laten wij, om dit te bewijzen, op MD de loodlijnen AE en BF neer, dan zijn deze evenwijdig met de lijn MC, die ook een rechten hoek maakt met MD. Men heeft dus

$$\frac{EM}{MF} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} \text{ en } \frac{AE}{BF} = \frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}; \text{ en}$$

bijgevolg ook EM : MF = AE : BF,

zoodat de driehoeken AEM en BFM gelijkvormig zijn, daar zij een hoek gelijk hebben en de zijden om dien hoek evenredig; en men heeft dus

$$MA : MB = EM : MF = m : n$$

zoodat M een punt is van de meetkundige plaats.

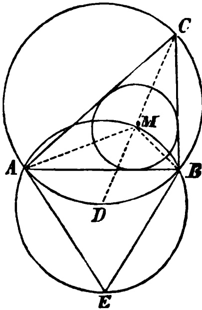
Vraagstukken. 1. Construeer een driehoek, waarvan gegeven is de grondlijn, de hoogte en de verhouding der opstaande zijden.

2. Construeer een driehoek, als gegeven zijn de grondlijn, de tophoek en de verhouding der opstaande zijden.

3. Een punt te bepalen, welks afstanden van de hoekpunten van een driehoek zich verhouden als 3 gegeven rechte lijnen.

§ 56. *De meetkundige plaats te bepalen van de middelpunten der cirkels, die beschreven zijn in driehoeken, welke de grondlijn gemeen hebben en waarvan de tophoek een gegeven grootte bezit.*

Fig. 32.



Onderstellen wij, dat de driehoeken alle aan denzelfden kant der grondlijn AB liggen. De toppunten der driehoeken liggen alle in een cirkelboog ACB. Zij nu ABC zulk een driehoek en M het middelpunt van den ingeschreven cirkel. Trekken wij AM en BM, dan is $\angle MAB = \frac{1}{2} A$, $\angle MBA = \frac{1}{2} B$ en dus

$$\angle AMB = 180^\circ - (\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B)$$

of daar $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B = 90^\circ - \frac{1}{2} C$

$$\angle AMB = 90^\circ + \tfrac{1}{2} C.$$

Hieruit blijkt, dat het middelpunt M voor al de ingeschreven cirkels moet liggen in een cirkelboog, die AB tot koorde heeft en waarvan de omtrekshoeken, wier beenen door de uiteinden van de koorde gaan, hoeken bevatten, die gelijk zijn aan 90°, plus de helft van den tophoek. Omgekeerd zal elk punt M van dezen boog het middelpunt zijn van den ingeschreven cirkel van een driehoek, die AB tot grondlijn heeft en waarvan de tophoek de gegeven grootte bezit. Beschrijven wij nl. uit M als middelpunt een cirkelomtrek, die raakt aan AB, en uit A en B raaklijnen aan dien cirkel, welke elkaar snijden in C. Nu is bekend, dat $\angle AMB = 90^\circ + \frac{1}{2}$ toph. Dus

$$\angle MAB + MBA = 180^\circ - (90^\circ + \tfrac{1}{2}\text{ toph.}) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\text{ toph.}$$

Daar CAB het dubbele is van MAB en CBA het dubbele van MBA, zoo is $\angle CAB + \angle CBA = 2 \times (90^\circ - \frac{1}{2}$ toph.)

of $\angle CAB + \angle CBA = 180^\circ -$ toph.

$\angle ACB =$ toph.

waaruit blijkt, dat M het middelpunt is van een ingeschreven cirkel, die aan het gestelde voldoet. We kunnen dus zeggen: *de meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die beschreven zijn in de driehoeken, welke de grondlijn gemeen en een tophoek van gegeven grootte hebben, is de boog van een cirkelsegment, dat de gegeven lijn tot koorde heeft, en hoeken bevat, die gelijk zijn aan* 90°, *plus de helft van den tophoek.*

De lezer kan nu gemakkelijk bewijzen, dat de cirkelboog, die deze meetkundige plaats aanvult tot een cirkelomtrek, de meetkundige plaats is der middelpunten van de *aangeschreven* cirkels, die de zijde AB raken.

We willen nu ook het middelpunt X van de meetkundige plaats bepalen.

Zij E een punt in het verlengde van boog AMB, dan is $\angle AEB = 180^\circ - \angle AMB = 90^\circ - \frac{1}{2}$ toph. Daar nu $\angle AEB$ een omtrekshoek is, die op denzelfden boog staat als $\angle AXB$, hebben we

$$\angle AXB = 2 \angle AEB = 180^\circ - \text{toph.}$$

Daar $\angle AMB$ stomp is, moet X aan denzelfden kant van AB liggen als boog ADB. Hieruit en uit de bovenstaande gelijkheid volgt, dat X in boog ADB moet liggen. Daar X ook liggen moet in de lijn, die AB rechthoekig middendoor deelt, is X het midden van boog AB.

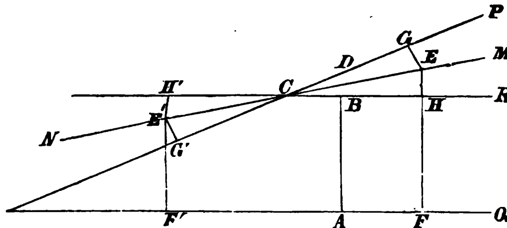
§ 57. Bij het opzoeken van meetkundige plaatsen kan men soms de analytische methode toepassen, of m. a. w. men kan de eene meetkundige plaats terugbrengen tot eene andere. We zullen dit ophelderen aan een paar voorbeelden.

De meetkundige plaats te bepalen van de punten, waarvoor het verschil der afstanden tot twee elkaar snijdende rechte lijnen een gegeven lengte a *bezit.*

Laat P en Q de gegeven elkaar snijdende lijnen zijn, en zij Q de lijn waarop de langste loodlijn moet vallen. Stellen wij ons voor, dat de loodlijnen, op Q neergelaten uit de verschillende punten der meetk. plaats, alle verminderd worden met

het verschil der beide afstanden. Men krijgt dan een rechte lijn R, die evenwijdig is met Q en waarvan de punten der meetk. plaats op gelijke afstanden verwijderd zijn als van P. De vraag is dus teruggebracht tot het bepalen der meetk. plaats van de punten, die op gelijke afstanden liggen van P en R. Deze meetk. plaats is bekend: het zijn nl. de lijnen, die $\angle$ PCR en zijn nevenhoek middendoor deelen.

Fig. 33.



Nu hebben we bij het voorgaande ondersteld, dat de loodlijn op Q neergelaten grooter is dan het gegeven verschil. Voor elk punt van de lijn CEM, die zich onbepaald ver uitstrekt aan het uiteinde M, is dat ook het geval. Neemt men echter een punt E′ tusschen R en Q, dan heeft men

$$E'F' + E'G' = F'H'$$

zoodat alsdan niet het verschil maar de som der loodlijnen gelijk is aan den afstand van R tot Q.

Men ga ook na, hoe het gesteld is met een punt der lijn CN, dat aan den anderen kant van Q ligt als R. Evenzoo voor de lijn, die hoek GCH′ middendoor deelt.

Opmerking. Wilde men aannemen, dat een loodlijn op P neergelaten positief is, wanneer zij aan denzelfden kant ligt als E, en negatief, wanneer zij aan tegengestelden kant ligt, dan zou men ook voor E′ hebben

$$E'F' - E'G' = F'H'$$

Alle punten van de lijnen, die de hoeken van P en R middendoor deelen, voldoen dan aan de gestelde voorwaarden, als men op dezelfde wijze handelt ten aanzien der loodlijnen op Q.

§ 58. *De meetkundige plaats te bepalen van de punten, waaruit men twee gegeven cirkels onder gelijke hoeken ziet.*

De hoek, waaronder men een cirkel ziet uit een zeker punt, is de hoek van de beide raaklijnen, uit dat punt aan den cirkel getrokken. Vereenigt men een punt der meetk. plaats met de

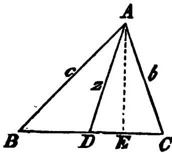
beide middelpunten, dan vormen de vereenigingslijnen gelijke hoeken met de raaklijnen van den overeenkomstigen cirkel; en omgekeerd: als die hoeken gelijk zijn, vormen de raaklijnen gelijke hoeken en heeft men een punt der meetk. plaats. Vereenigt men nu een raakpunt van elken cirkel met zijn middelpunt, dan krijgt men twee gelijkvormige rechthoekige driehoeken, daar zij een scherpen hoek gelijk hebben. Hieruit volgt, dat de lijnen uit een punt der meetk. plaats, naar de twee middelpunten getrokken, zich verhouden als de twee stralen; terwijl omgekeerd een punt, waarvoor die verhoudingen gelijk zijn, tot de meetk. plaats behoort.

De gevraagde meetkundige plaats is dus dezelfde, als die van de punten, waarvoor de verhouding der afstanden tot de twee middelpunten gelijk is aan de verhouding der stralen, dat is gelijk aan een bepaald getal. En deze meetkundige plaats is bekend.

§ 59 *De meetkundige plaats te bepalen van de punten, waarvoor de som der kwadraten van de afstanden tot twee gegeven punten standvastig is.*

Laat B en C de gegeven punten zijn en A een punt van de meetk. plaats. Zij D het midden van BC, dan is

Fig. 34.



$$AB^2 + AC^2 = 2\ AD^2 + 2\ BD^2$$

$$2\ AD^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ BD^2$$

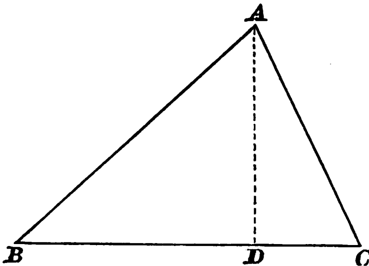
of, als p^2 de gegeven som is,

$$2\ AD^2 = p^2 - 2\ BD^2$$

$$AD^2 = \tfrac{1}{2}\, p^2 - BD^2$$

We zien dus, dat AD^2 een standvastige waarde moet hebben. Maar dan is ook AD standvastig, en het punt A ligt bijgevolg op een cirkelomtrek, die het midden van BC tot middelpunt heeft en $\sqrt{(\frac{1}{2}\, p^2 - BD^2)}$ tot straal.

Fig. 35.



§ 60. *De meetkundige plaats te bepalen van de punten, waarvoor het verschil der kwadraten van de afstanden tot twee gegeven punten standvastig is.*

Laat B en C de gegeven punten zijn, A een punt der meetkundige plaats en p^2 het standvastige ver-

schil. We hebben dan, als AD de loodlijn is, uit A op BC neergelaten,

$$AB^2 - AC^2 = p^2.$$

Maar uit $AB^2 - BD^2 = AD^2$

en $AC^2 - CD^2 = AD^2$

volgt $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$,

zoodat $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

We hebben dus $BD^2 - CD^2 = p^2$

$$(BD + CD)(BD - CD) = p^2$$

Ligt nu D tusschen B en C, dan is $BD + CD$ standvastig en bijgevolg ook $BD - CD$. Ligt D op het verlengde van BC, dan is $BD - CD$ en bijgevolg ook $BD + CD$ standvastig. In ieder geval is dus zoowel de som van BD en CD als hun verschil standvastig. BD en CD zelf zijn dus ook standvastig, zoodat D standvastig is. We weten nu, dat een loodlijn uit een willekeurig punt der meetk. plaats op BC neergelaten altijd haar voetpunt heeft in D. Elk punt der meetk. plaats is dus een punt van de loodlijn in D op BC geplaatst. Daar uit $BD^2 - CD^2 = p^2$ volgt $AB^2 - AC^2 = p^2$, zal omgekeerd elk punt van die loodlijn tot de meetk. plaats behooren. Die loodlijn is dus de meetk. plaats.

Om het punt D te vinden uit $BD^2 - CD^2 = p^2$, merken wij op, dat voor elk punt tusschen B en C gelegen $BD^2 - CD^2$ kleiner is dan BC^2, en voor elk punt op het verlengde van BC grooter dan BC^2. Is dus p^2 kleiner dan BC^2, zoo moet D op BC zelf liggen, en is p^2 grooter dan BC^2, zoo moet D op het verlengde van BC liggen.

Is nu $p < BC$, dan kunnen we voor

$$(BD + CD)(BD - CD) = p^2$$

schrijven $BC \times (BD - CD) = p^2$,

zoodat $BD - CD = p^2 : BD$.

We kunnen dus $BD - CD$ vinden als derde evenredige tot BD en p. Daar $BD + CD$ bekend is, kunnen we verder BD bepalen.

Evenzoo wanneer $p > BC$.

§ 61. *De meetkundige plaats te bepalen van de punten, waarvoor de raaklijnen aan twee gegeven cirkels getrokken gelijk zijn.*

Stellen wij ons voor, dat uit een punt der meetk. plaats aan elken cirkel een raaklijn getrokken is en dat hetzelfde punt vereenigd is met de twee middelpunten. Vereenigt men ook

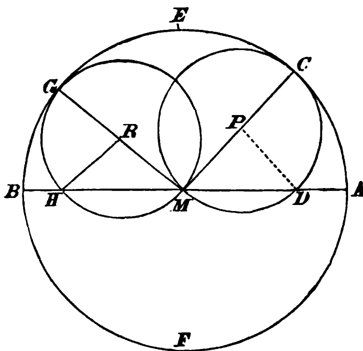
nog bij elken cirkel het raakpunt met het middelpunt, dan ontstaan twee rechthoekige driehoeken.

Daar nu de raaklijnen gelijk zijn, is het verschil van hun kwadraten standvastig. Vermeerderen wij dat verschil met het verschil der kwadraten van de twee stralen, dan krijgen we weer een standvastig verschil, en dat verschil is gelijk aan het verschil der kwadraten van de lijnen, die het punt der meetk. plaats vereenigen met de middelpunten. Daar nu het verschil der kwadraten van de afstanden van een punt der meetk. plaats tot de twee middelpunten standvastig is, moet dat punt volgens de vorige § behooren tot een meetkundige plaats, die een rechte lijn is, loodrecht op de lijn welke de twee middelpunten vereenigt.

§ 62. Op dezelfde manier als in de vorige § blijkt, dat *de meetkundige plaats der middelpunten van de cirkelomtrekkken, die twee gegeven cirkelomtrekken middendoor deelen, een rechte lijn is, rechthoekig op de lijn, die door de middelpunten der gegeven cirkels gaat.*

§ 63. *Bepaal de meetkundige plaats van een punt in een cirkelomtrek, die rolt langs de binnenzij van een anderen, welke tweemaal zoo grooten straal heeft als de eerste.*

Fig. 36.



Alle punten van de bewegende kromme lijn vallen achtereenvolgens samen met een punt van de vaste lijn. Het punt D, waarvan wij de meetk. plaats moeten bepalen, komt in het punt A van de vaste lijn. Als de bewegende cirkel met zijn geheelen omtrek langs de vaste lijn heeft gerold, zal de helft van de vaste lijn doorloopen zijn, en het bovengenoemde punt komt dus in het punt B, dat met A op een middellijn van den vasten cirkel ligt. Heeft de bewegende cirkel juist langs een vierde van den vasten cirkel gerold, dan is de helft van de bewegende kromme lijn in aanraking geweest met de vaste kromme lijn. Als dus de bewegende cirkel raakt in het midden E van AB, zal het bewegende punt juist het eene uiteinde van de middellijn der bewegende lijn zijn, terwijl E het andere uiteinde is. Het be-

wegende punt valt dan samen met het middelpunt M van den vasten cirkel.

We hebben dus gezien, dat A, M en B punten der meetk. plaats zijn en de vraag doet zich dus voor, of de middellijn AB die meetk. plaats is.

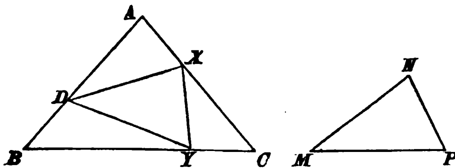
Om dit te onderzoeken, merken wij in de eerste plaats op, dat de bewegende kromme lijn steeds door M gaat. Zij nu P het middelpunt van de bewegende lijn op het oogenblik dat het punt, waarvan wij de meetkundige plaats moeten bepalen, zich in D bevindt. Volgens de onderstelling is boog CD even lang als boog CA. Hieruit volgt dat boog CD tweemaal zooveel graden bevat als boog CA. De omtrekshoek CMD van den kleineren cirkel is dus gelijk aan den middelpuntshoek CMA van den grooteren cirkel. De straal MD valt dus langs den straal MA, zoodat elk punt der meetk. plaats in de middellijn AB moet liggen.

Het blijve nu verder aan den lezer overgelaten, om te bewijzen, dat elk punt H der middellijn AB een punt van de meetk. plaats is.

§ 64. Werkstuk. *In een gegeven driehoek ABC een driehoek te beschrijven, die gelijkvormig is met een anderen gegeven driehoek MNP en waarvan het hoekpunt, dat gelijkstandig is met M, in een gegeven punt D van AB ligt.*

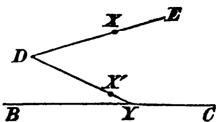
Laat DXY de gevraagde driehoek zijn; zijn hoek D moet gelijk wezen aan M, en de verhouding van DX tot DY moet gelijk zijn aan de verhouding van MN tot MP.

Fig. 37.



Deze voorwaarde, die noodig is, is tevens voldoende. Laten wij nu de voorwaarde ter zijde, dat X in de zijde AC moet liggen, dan is het de vraag om de meetkundige plaats te bepalen van een punt X, dat op de volgende

Fig. 38.



wijze wordt verkregen: *Men verbindt het gegeven punt D met een willekeurig punt Y van de gegeven lijn BC; door D trekt men de lijn DE zoodanig, dat ∠ D gelijk is aan een gegeven hoek; het punt X neemt*

men zoodanig op die lijn, dat de verhouding van DX tot DY gelijk is aan de verhouding van twee gegeven lijnen.

Heeft men de meetkundige plaats van X gevonden, dan moet men een snijpunt nemen van die meetkundige plaats met de zijde AC van den gegeven driehoek.

Om nu die meetkundige plaats te vinden, merken wij op, dat men om een willekeurig punt X er van te bepalen, kan beginnen met DX op DY zelf te nemen, waardoor men een punt X′ vindt, dat men vervolgens om D den gegeven hoek M laat draaien. Nu is de meetkundige plaats van X′ een rechte lijn evenwijdig aan BC. Laat men die lijn om D den hoek XDY draaien, dan krijgt men de meetkundige plaats van X.

§ 65. VRAAGSTUKKEN. 1. Beschrijf een driehoek, waarvan gegeven is een hoek, de overeenkomstige hoogtelijn, en nog een hoogtelijn.

2. Bewijs, dat de meetkundige plaats der punten, waarvan de som der kwadraten van de afstanden tot vier gegeven punten gegeven is, een cirkelomtrek is.

3. Op een gegeven rechte lijn een punt te bepalen, hetwelk de eigenschap bezit, dat een raaklijn, uit dat punt aan een gegeven cirkel getrokken, een gegeven lengte bezit.

4. Bepaal de meetkundige plaats der middelpunten van de cirkels, die twee gegeven cirkels rechthoekig snijden.

5. Construeer een cirkelomtrek, die de omtrekken van drie gegeven cirkels middendoor deelt.

6. Als A, B, C en D vier gegeven punten zijn, vraagt men de meetkundige plaats van het punt P, waarvoor driehoek PAB even groot is als driehoek PCD.

7. Met een gegeven straal een cirkelomtrek te beschrijven, die een gegeven cirkelomtrek middendoor deelt en een koorde van gegeven lengte afsnijdt van een gegeven rechte lijn.

8. Op een gegeven rechte lijn een punt te bepalen, hetwelk de eigenschap bezit, dat de raaklijnen, uit dat punt aan een gegeven cirkelomtrek getrokken, elkaar snijden onder een gegeven hoek.

9. Beschrijf een driehoek, waarvan gegeven zijn de straal des omgeschreven cirkels, de straal van den ingeschreven cirkel en een zijde.

10. Beschrijf in een gegeven cirkelsegment een rechthoek, waarvan de zijden zich verhouden als 1 tot 3.

11. In een der zijden van een driehoek wordt het punt gevraagd, waaruit de som der loodlijnen op de andere zijden gelijk is aan een gegeven lijn.

12. Beschrijf in een gegeven driehoek een anderen, waarvan de zijden evenwijdig loopen met drie gegeven rechte lijnen.

13. Beschrijf in een gegeven cirkel een rechthoek, die gelijkvormig is met een gegeven rechthoek.

14. Beschrijf in een gegeven driehoek een parallelogram, dat gelijkvormig is met een gegeven parallelogram.

15. Beschrijf in een gegeven cirkelsector een rechthoek van gegeven vorm.

16. Een rechte lijn te trekken, die een gegeven lengte bezit, evenwijdig is aan een gegeven rechte lijn en haar uiteinden in twee zijden van een gegeven driehoek heeft.

17. Een rechte lijn te trekken, die gelijk en evenwijdig is aan een gegeven rechte lijn en met haar uiteinden op twee gegeven cirkelomtrekken ligt.

Aanwijzing. Alle rechte lijnen, die evenwijdig en gelijk zijn aan een gegeven lijn en wier uiteinden op een cirkelomtrek liggen, hebben tot meetkundige plaats van haar andere uiteinde twee cirkelomtrekken, die verkregen worden, als men alle punten van den gegeven cirkelomtrek verplaatst denkt evenwijdig aan de gegeven lijn en op een afstand gelijk aan de gegeven lijn. De verplaatsing kan in twee richtingen geschieden en vandaar dat de meetk. plaats uit 2 cirkelomtrekken bestaat.

18. In een gegeven cirkel een koorde te trekken, die gelijk is aan en evenwijdig loopt met een gegeven rechte lijn.

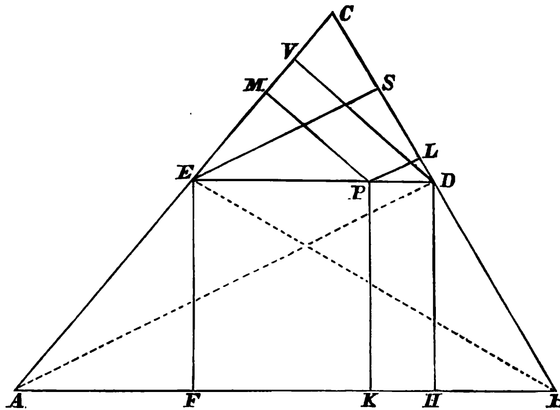
§ 66. Wordt er gevraagd naar de meetkundige plaats van een punt, dat aan gegeven voorwaarden voldoet, dan is het soms zeer nuttig, enkele bijzondere punten van de meetkundige plaats op te sporen.

Zij bv. gevraagd naar *de meetkundige plaats der punten, waarvan de afstand tot de grondlijn van een driehoek, gelijk is aan de som der afstanden tot de opstaande zijden.* We zullen daarbij onderstellen, dat punten buiten den driehoek niet in aanmerking komen.

Zij ABC de driehoek met de grondlijn AB, dan moeten we

de meetkundige plaats bepalen van het punt P, waarvoor PK = PL + PM.

Fig. 39.



Ligt nu een punt der meetk. plaats in BC, dan is van dat punt de afstand tot BC nul en moeten dus de afstanden tot AB en AC gelijk zijn. Zulk een punt D vinden we, door hoek A te halveeren.

Evenzoo vinden we een punt E der meetkundige plaats, in de lijn AC gelegen, als we hoek B middendoor deelen.

Is nu de meetkundige plaats een rechte lijn, dan is DE die rechte lijn, en we trachten daarom te bewijzen, dat voor een punt P, in de rechte lijn DE gelegen, PK = PL + PM.

Hiertoe drukken we PK uit in EF en DH. We hebben nl. in het trapezium DEFH:

$$PK = \frac{PD \times EF + PE \times DH}{ED}$$

Maar EF = ES en DH = DV, dus

$$PK = \frac{PD}{ED} \times ES + \frac{PE}{ED} \times DV$$

Nu is in de gelijkvormige driehoeken PDL en EDS

$$PD : ED = PL : ES \text{ of } PL = \frac{PD}{ED} \times ES$$

Evenzoo blijkt $$PM = \frac{PE}{ED} \times DV,$$

zoodat PK = PL + PM, wat te bewijzen was.

Opmerkingen. Er is nu gebleken, dat elk punt van de lijn

DE een punt der meetkundige plaats is. Met behulp van een rechte lijn evenwijdig aan DE kan men verder gemakkelijk bewijzen, dat een punt buiten DE niet aan het vereischte voldoet. De rechte lijn evenwijdig aan DE, die ik bedoel, moet door dat punt gaan.

Dat de meetkundige plaats een rechte lijn zou zijn, was aanvankelijk slechts een gissing. De waarschijnlijkheid van deze gissing wordt verhoogd, als men let op het bijzondere geval van den gelijkzijdigen driehoek. Daarvoor ziet men terstond, dat de meetkundige plaats een rechte lijn is, die evenwijdig loopt aan de grondlijn en de 2 opstaande zijden, bijgevolg ook de hoogtelijn uit het toppunt neergelaten, middendoor deelt.

Wil men ook punten buiten den driehoek in aanmerking nemen, dan vindt men verder als meetkundige plaats ook de verlengden van de lijn, die we vonden, mits men de loodlijn, die aan den anderen kant van een opstaande zijde valt dan nu, als negatief beschouwt.

Wordt het vraagstuk nog iets algemeener gemaakt, doordat men niet spreekt van een grondlijn maar van een der zijden en elk der 3 dus beurtelings kan nemen, dan krijgt men als meetkundige plaats 3 *rechte* lijnen.

§ 67. Nadat dit boek in 1878 verschenen was, werden in 1880 Fransche en Duitsche vertalingen geleverd van een dergelijk werk van den Deen Petersen. Hieraan ontleen ik nog de volgende vraagstukken tot en met bl. 62.

1. Een punt te bepalen, van waar men twee gegeven rechte lijnen onder gegeven hoeken ziet.

2. Een koordenvierhoek te construeeren, als men een hoek kent, een aanliggende zijde en de twee hoeklijnen.

3. Door een gegeven punt een rechte lijn te trekken, die een gegeven cirkelomtrek zoodanig snijdt, dat de som der afstanden van de snijpunten tot een gegeven lijn gelijk is aan een gegeven lengte. (Men bepale het midden van de koorde, die de gegeven cirkel zal afsnijden van de te bepalen lijn.)

4. Een cirkel te bepalen, waarvan het middelpunt op een gegeven rechte lijn ligt en waarvan de omtrek op gegeven afstanden verwijderd is van twee gegeven rechte lijnen.

5. Een koordenvierhoek te construeeren, als men kent AB, BC, AC en den hoek, dien de diagonalen vormen.

6. Een punt te bepalen, waarvoor de raaklijnen aan drie gegeven cirkels getrokken even lang zijn.

7. Construeer een driehoek, waarvan men kent de grondlijn, den tophoek en de som van de vierkanten der opstaande zijden.

8. Binnen een driehoek een punt te bepalen zóó dat de lijnen, die het punt vereenigen met de drie hoekpunten van den driehoek, dezen verdeelen in drie gelijke deelen. (De meetkundige plaats der punten O, waarvoor de driehoeken OAB en OAC even groot zijn, is de rechte lijn, die door A en het midden van BC gaat.)

9. Construeer een cirkel, die drie gegeven even groote cirkels inwendig raakt.

10. Construeer een driehoek, waarvan gegeven zijn a, A en b^2-c^2.

11. Construeer een rechthoekigen driehoek, als men de hoogtelijn op de hypotenusa kent, twee punten der hypotenusa en een punt van elk der rechthoekszijden.

12. Bepaal een punt, van waar men drie stukken AB, BC en CD eener zelfde rechte lijn onder gelijke hoeken ziet.

13. Binnen een driehoek een punt te bepalen, van waar men zijn drie zijden onder gelijke hoeken ziet.

14. Een punt te bepalen, van waar men drie gegeven cirkels onder gelijke hoeken ziet.

15. In een vierhoek een punt te bepalen, waarvoor de afstanden tot het eene paar overstaande zijden een gegeven som hebben en de afstanden tot het andere paar overstaande zijden een gegeven verhouding.

16. Op een gegeven cirkelomtrek een punt te bepalen, waarvoor de som der afstanden tot twee gegeven rechte lijnen zoo klein mogelijk is.

17. In een gegeven cirkel een rechthoekigen driehoek te construeeren, wiens zijden ieder door een gegeven punt gaan.

18. Op een cirkelvormig biljart zijn in dezelfde middellijn twee ballen geplaatst. Hoe moet men den eenen stooten opdat hij, na eenmaal den band geraakt te hebben, den anderen ontmoet?

§ 68. EIGENSCHAP. *Trekt men uit een punt P een rechte lijn naar een willekeurig punt A van een rechte lijn of een cirkel en verdeelt men de lijn PA door een punt M, zoodanig dat*

PA : PM een bepaalde verhouding heeft, dan is de meetkundige plaats van M een rechte lijn, die evenwijdig loopt met de gegeven rechte lijn, of een cirkel.

Evenzoo wanneer men M op het verlengde van PA of van AP neemt.

Deze stelling is gemakkelijk te bewijzen. Houdt men haar in 't oog, dan kan men gemakkelijk de volgende werkstukken oplossen door de methode der meetkundige plaatsen.

§ 69. Werkstukken. 1. Uit een punt O een rechte lijn te trekken, die twee gegeven rechte lijnen zoodanig snijdt, dat de afstanden van O tot de twee snijpunten een gegeven verhouding hebben.

2. Door een punt binnen een gegeven cirkel een koorde te trekken, die door het gegeven punt in 2 stukken wordt verdeeld, wier verhouding gegeven is.

3. Door een der snijpunten van twee cirkelomtrekken een rechte lijn te trekken, waarop door de 2 gegeven cirkels twee gelijke koorden worden afgesneden.

4. In een gegeven vierhoek een parallelogram te beschrijven, waarvan het middelpunt gegeven is.

5. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn *a*, *b* en de lijn *m*, die het midden van *c* vereenigt met C. (Men neme eerst de lijn CE = *m*, en beschrijve daarna uit C met *a* en *b* als stralen twee cirkels. Op het punt E en een dier twee cirkels past men met de verhouding — 1 bovengenoemde eigenschap toe. Waar de hulpcirkel den anderen der twee gegeven cirkels snijdt, heeft men een hoekpunt van den verlangden driehoek.)

6. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn *a*, A en de lijn, die B vereenigt met het midden der overstaande zijde.

7. Door een gegeven punt van een cirkelomtrek een koorde te trekken, die in twee gelijke stukken wordt verdeeld door een andere gegeven koorde. (Men kan hierbij een meetk. plaats bepalen ten aanzien der gegeven koorde of ten anzien van den gegeven cirkelomtrek. Wat men dan doen moet, drukt Petersen uit door te zeggen, dat men de gegeven koorde met 2 of den gegeven cirkelomtrek met $^1/_2$ moet vermenigvuldigen.)

8. In twee concentrische cirkels een rechte lijn te trekken zóó dat de kleinste koorde, die er wordt afgesneden, de helft is van de grootste.

9. Een driehoek te construeeren als gegeven zijn, *a*, *b* : *c* en de lijn, die C vereenigt met het midden van AB.

10. Een driehoek te construeeren, als men een hoek en twee zwaartelijnen er van kent.

11. Om een driehoek te bepalen, geeft men zijn zwaartepunt, een hoekpunt en twee rechte lijnen, waarop de andere twee hoekpunten moeten liggen. Hoe construeert men dien driehoek?

12. Evenzoo, wanneer men de twee rechte lijnen beide of een van beide vervangt door een cirkelomtrek.

13. Een driehoek te construeeren, waarvan men kent *a*, de zwaartelijn uit B en den hoek tusschen *b* en de zwaartelijn uit A.

14. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn: *b*, de zwaartelijn uit B en de hoek, dien *a* vormt met de zwaartelijn uit haar midden.

15. Een koordenvierhoek te construeeren, als men kent ∠A, BD, ∠ACB en de verhouding der stukken, waarin AC wordt verdeeld door BD.

16. Een parallelogram te construeeren, waarvan twee overstaande hoekpunten gegeven zijn, terwijl de andere hoekpunten op een gegeven cirkelomtrek moeten liggen.

17. In een driehoek uit A naar een punt van BC een lijn AD te trekken, die middenevenredig is tusschen BD en CD. (Hierbij bediene men zich van den cirkel, die om den driehoek kan beschreven worden.)

18. Een driehoek te construeeren, waarvan twee zijden gegeven zijn en de rechte lijn, die den ingesloten hoek middendoor deelt, gemeten tot aan de overstaande zijde.

19. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn, A, *b* en de hoek, die gevormd wordt door *a* en de lijn, welke A vereenigt met het midden der overstaande zijde.

20. In een gegeven driehoek, door A een lijn te trekken, zoodanig dat de stukken, begrepen tusschen A en de projecties van B en C op die lijn, een gegeven verhouding hebben.

21. Als een punt O en twee cirkels gegeven zijn, vraagt men aan elk dier cirkels een raaklijn te trekken, zóo dat de twee raaklijnen evenwijdig zijn en dat de afstanden van O tot die twee raakijnen een gegeven verhouding hebben.

Oplossing. Vermenigvuldigt men den eenen cirkel ten opzichte van O met die gegeven verhouding, dan heeft men twee cirkels, waaraan een zelfde lijn moet raken. Deze raaklijn kan men dus construeeren, waarna men gemakkelijk de andere kan trekken.

22. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn A, de zwaartelijn uit B en de hoek, die gevormd wordt door *a* en de zwaartelijn uit C.

23. Op een cirkelomtrek zijn twee punten A en B gegeven. Op dien omtrek een derde punt X te bepalen, zóo dat XA en XB een gegeven middellijn snijden in twee punten Y en Z, wier afstanden tot het middelpunt een gegeven verhouding hebben.

Oplossing. Vermenigvuldigt men AX ten opzichte van het middelpunt zoodanig dat Y samenvalt met Z, dan komt A in een punt A_1, dat men kan bepalen, en $\angle A_1ZB$ is alsdan bekend.

24. Een driehoek te construeeren, als men drie punten kent, die de drie zijden in gegeven verhoudingen verdeelen.

Oplossing. Zij ABC de driehoek, D, E en F de punten, zoodanig dat

$$BD : DA = m : n$$
$$AF : FC = p : q$$
$$CE : EB = r : s$$

Vermenigvuldigen we van D uit BD met $-n : m$, dan verandert D niet van plaats en valt B in het onbekende punt A.

Vermenigvuldigen we DA van F uit met $-q : p$, dan valt A in C, terwijl D in een bekend punt D_1 valt. Vermenigvuldigen we D_1C van E uit met $- s : r$, dan komt C in B en D_1 in een nieuw bekend punt D_2.

Daar de richting van een lijn bij die vermenigvuldiging niet verandert, moet BD_2 evenwijdig zijn met DB, zoodat D_1D_2 samenvalt met AB.

Om BC te vinden, begint men dezelfde bewerkingen van E uitgaande.

Opmerking. Dezelfde constructie geldt voor een willekeurigen veelhoek. Beschouwen wij in 't bijzonder het geval, dat de middens van alle zijden gegeven zijn en dat hun aantal even is. Het werkstuk is dan onbepaald of onmogelijk.

DE METHODE DER GELIJKVORMIGE FIGUREN.

---

§ 70. Als de verschillende gegevens ter bepaling van een figuur alle op één na betrekking hebben op den vorm, en men laat die eene voorwaarde ter zijde, dan krijgt men een figuur, dat gelijkvormig is met het gevraagde. Construeert men vervolgens een figuur, dat gelijkvormig is met het gevonden figuur en waarin het gegeven, dat men voorloopig ter zijde liet, de ware grootte heeft, dan krijgt men het verlangde figuur. De handelwijze, die zoodoende wordt toegepast, noemt men *de methode der gelijkvormige figuren*. Het wezen van deze methode bestaat dus hierin, dat men voorloopig een figuur construeert, dat gelijkvormig is met het gevraagde.

§ 71. WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, waarvan twee hoeken en de omtrek gegeven zijn.*

Construeert men eerst met een willekeurige lijn als zijde een driehoek, die de twee hoeken bevat, dan is deze gelijkvormig met den verlangden driehoek. Construeert men vervolgens een nieuwen driehoek zoodanig, dat de zijden van dezen tot de zijden van den hulpdriehoek staan, als de gegeven omtrek tot den omtrek van den hulpdriehoek, dan is die nieuwe driehoek de verlangde.

§ 72. WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, waaarvan de drie hoogtelijnen gegeven zijn.*

Noemen wij die hoogtelijnen p, q en r, dan verhouden de zijden van den gevraagden dr. zich als $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ en $\frac{1}{r}$, of als

$$q,\ p \text{ en } \frac{pq}{r}.$$

We moeten nu een driehoek construeeren, waarvan de eene hoogtelijn p is en waarvan de overeenkomstige zijde zich ver-

houdt tot de beide anderen als q tot p en tot $\frac{pq}{r}$. Construeeren wij nu de lijn $pq:r$ en een driehoek, die tot zijden heeft

$$q, p \text{ en } \frac{pq}{r},$$

dan is deze gelijkvormig met den verlangden driehoek. Construeert men de hoogtelijn op q en neemt men op deze een stuk, dat gelijk is aan p, dan vindt men, door het trekken van een lijn evenwijdig aan q, den verlangden driehoek.

Opmerking. Men kan altijd, als verschillende lijnen gegeven zijn, die gegevens vervangen door een der lijnen en de verhouding van de overige lijnen tot die eene. Hierdoor is het mogelijk, de methode der gelijkvormige figuren ook toe te passen, wanneer onder de gegevens twee of meer lijnen voorkomen.

§ 73. Werkstuk. *Een driehoek te construeeren, waarvan men den tophoek kent, de overeenkomstige hoogtelijn en de verhouding der stukken, waarin deze de grondlijn verdeelt.*

Laten wij de hoogtelijn ter zijde. Neem een willekeurige lijn als grondlijn en verdeel haar volgens de gegeven verhouding. Richt in het deelpunt een loodlijn op en beschrijf op de aangenomen grondlijn als koorde een cirkelsegment, dat den gegeven hoek bevat. Het snijpunt van den boog van dat segment met de loodlijn is het toppunt van een driehoek, die gelijkvormig is met den verlangden driehoek. Construeert men een driehoek, die gelijkvormig is met den gevonden hulpdriehoek en de gegeven hoogtelijn bevat, dan is aan het vereischte voldaan.

§ 74. Letten wij op de bovenstaande oplossingen, dan blijkt dat *het voordeel van de methode der gelijkvormige figuren* hierin bestaat, dat men een gegeven lijn vervangt door een andere, die men willekeurig kan kiezen, bv. een hoogtelijn of een diagonaal door een zijde.

Vraagstukken. 1. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn de tophoek, de rechte lijn, die den tophoek middendoor deelt, en de hoek, dien deze lijn met de grondlijn maakt.

2. Een driehoek te beschrijven, als gegeven is de tophoek, de hoogte en de verhouding van de som der opstaande zijden tot de grondlijn.

3. Beschrijf een driehoek, als gegeven zijn twee hoeken en de rechte lijn, die een hoekpunt verbindt met het midden der overstaande zijde.

4. Van een vierhoek is gegeven, dat drie zijden zich verhouden als 1, 2 en 3. Wanneer de door die zijden gevormde hoeken en het oppervlak van den vierhoek gegeven zijn, vraagt men den vierhoek te construeeren.

5. Een ruit te construeeren, als de verhouding van haar hoeklijnen gegeven is en de afstand van twee overstaande zijden.

6. Een driehoek te construeeren, als de hoeken en de grootste hoogtelijn gegeven zijn.

7. Construeer een gelijkzijdigen driehoek, waarvan het verschil tusschen een zijde en een hoogtelijn bekend is.

8. Construeer een ruit, die een hoek van 60 graden heeft en waarvan de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van een gegeven vierkant.

9. Een trapezium te construeeren, als gegeven zijn: de evenwijdige zijden, de verhouding der diagonalen en de hoek, waaronder deze elkander snijden.

10. Een vierhoek te construeeren, waarvan twee overstaande hoekpunten en de hoeken gegeven zijn, terwijl in den vierhoek een cirkel moet kunnen beschreven worden.

11. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn de grondlijn, de tophoek en de verhouding der opstaande zijden.

12. Construeer een driehoek, waarvan twee zijden gelijk zijn aan twee gegeven rechte lijnen, terwijl de derde zijde gelijk is aan de hoogtelijn op die zijde.

13. Een rechthoekigen driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn: de som der stralen van den in- en omgeschreven cirkel en een scherpe hoek.

14. Construeer een trapezium, waarvan de hoeken en de diagonalen gegeven zijn.

HET WEGLATEN VAN EEN DER VOORWAARDEN.

§ 75. Door een der voorwaarden weg te laten, komt men soms tot een figuur, dat gelijkvormig is met het verlangde, soms komt men tot de methode der meetkundige plaatsen en een andermaal kan men, door een gegeven weg te laten, tot een oplossing geraken, die noch tot de methode der meetkundige plaatsen, noch tot die der gelijkvormige figuren behoort.

Een voorbeeld daarvan hebben wij reeds gehad in het leerboek der vlakke meetkunde, nl. de oplossing van het werkstuk, om *door een punt buiten een rechte lijn een andere te trekken, die met de eerste een hoek van gegeven grootte vormt.* Men laat eerst de voorwaarde, dat de gevraagde lijn door het gegeven punt moet gaan, ter zijde. De vraag is dan om een lijn te trekken, die met een gegeven lijn een hoek van gegeven grootte vormt. Van dien hulphoek kan men het hoekpnnt willekeurig kiezen. Evenwijdig met de hulplijn trekt men door het gegeven punt een andere rechte lijn, en deze is dan de gevraagde.

§ 76. Werkstuk. *Door een gegeven punt een rechte lijn te trekken, die twee gegeven lijnen onder gelijke hoeken snijdt.*

Laat eerst de voorwaarde ter zijde, dat de gevraagde lijn door het gegeven punt moet gaan. Men krijgt een rechte lijn, die aan de andere voorwaarde voldoet, als men op de gegeven lijnen van hun snijpunt af 2 gelijke stukken neemt en een rechte lijn trekt door de niet gemeenschappelijke uiteinden van die twee stukken. Elke lijn evenwijdig met deze hulplijn voldoet ook aan de voorwaarde, die men heeft behouden, en een rechte lijn, door het gegeven punt evenwijdig aan de hulplijn getrokken, voldoet aan beide voorwaarden.

Er zijn 2 rechte lijnen, die aan het gestelde voldoen.

§ 77. Werkstuk. *Door een gegeven punt een rechte lijn te trekken, waarvan gelijke stukken worden afgesneden door twee stel evenwijdige lijnen.*

Loopen *de lijnen van het eene stel evenwijdig aan de lijnen van het andere stel,* dan is er geen lijn, die aan het vereischte voldoet, wanneer de onderlinge afstand van het eene stel grooter is dan de onderlinge afstand van het andere stel; en elke lijn, die door het gegeven punt gaat en de gegeven lijnen snijdt, voldoet aan het vereischte, wanneer de onderlinge afstand van het eene stel gelijk is aan den onderlingen afstand van het andere stel.

Loopen de lijnen van het eene stel niet evenwijdig aan die van het andere stel, dan vormen zij door haar snijding een parallelogram. Laat men nu de voorwaarde ter zijde, dat de gevraagde lijn door het gegeven punt moet gaan, dan heeft men in de diagonalen van genoemd parallelogram terstond twee lijnen, die aan de andere voorwaarde voldoen. Een rechte lijn door het gegeven punt evenwijdig aan een van die hoeklijnen getrokken, voldoet aan beide voorwaarden.

§ 78. Werkstuk. *Door een punt binnen of buiten een hoek gelegen een lijn te trekken, die de beenen van den hoek zoodanig snijdt, dat de afgesneden driehoek een omtrek van gegeven lengte heeft.*

Fig. 40.

We moeten een rechte lijn trekken, die aan twee voorwaarden voldoet. Laten we de eene voorwaarde, nl. dat de rechte lijn door het gegeven punt moet gaan, ter zijde, dan is het de vraag wat we weten van de onbepaalde grondlijn eens driehoeks, waarvan de tophoek en de omtrek gegeven zijn. Van zulk een grondlijn weten we, dat ze raakt aan een

cirkelomtrek, die de beenen van den tophoek tot raaklijnen heeft. Zij nl. A een hoek, wiens beenen door een cirkel geraakt worden in H en K. Trekken wij nu een raaklijn DE aan den cirkel, zóó dat er een driehoek ADE ontstaat, die den cirkel tot aangeschreven cirkel heeft. Nu is EL = EK en DL = DH, zoodat de omtrek van driehoek ADE gelijk is aan AK + AH = 2 AH. Op dezelfde wijze blijkt, dat de omtrek van elken driehoek, die A tot tophoek en den cirkel HNK tot aangeschreven cirkel heeft, gelijk is aan 2AH = 2AK.

Zij nu A de gegeven hoek en P het gegeven punt, dan hebben we de volgende constructie.

Neem op de beenen van hoek A twee stukken AH en AK, die ieder gelijk zijn aan de helft van den gegeven omtrek. Beschrijf een cirkelomtrek, die de beenen van hoek A raakt in H en K, trek uit het gegeven punt P een raaklijn aan dien cirkelomtrek zóó dat er een driehoek ABC ontstaat, die den cirkel tot aangeschreven cirkel heeft, dan is ABC de gevraagde driehoek.

Opmerkingen. 1. We onderstelden hierboven, dat het punt buiten den gegeven hoek ligt. Dezelfde constructie gaat door, als het binnen den gegeven hoek ligt. Ligt het punt binnen den gegeven hoek in de gesloten ruimte AHNK, die begrensd wordt door de beenen van den gegeven hoek en den cirkelboog HNK, dan voldoen twee driehoeken aan het gestelde. Ligt het gegeven punt in den cirkelboog HNK tusschen H en K, dan is er 1 driehoek, die aan 't vereischte voldoet. Ligt het gegeven punt binnen den gegeven hoek en niet tevens in dat afgesloten deel of in den cirkelboog HNK tusschen H en K, dan is er geen driehoek, die aan het vereischte voldoet. Ligt het punt binnen den overstaanden hoek van KAB, dan is er eveneens geen driehoek, die aan het gestelde voldoet. Ligt het gegeven punt binnen een nevenhoek van hoek KAB, dan is er altijd één driehoek, die aan het vereischte voldoet en niet meer dan een.

2. Of men spoedig slaagt bij 't oplossen van dit vraagstuk, hangt daarvan af, of men reeds vroeger eens de aandacht heeft gevestigd op de eigenschap der driehoeken, die een zelfden tophoek en binnen dien tophoek een zelfden aangeschreven cirkel hebben. De hier bedoelde eigenschap is deze: *Alle drie-*

hoeken, die den tophoek gemeen hebben en den aangeschreven cirkel, die de verlengden der opstaande zijden raakt, hebben even groote omtrekken.

3. Deze eigenschap kan in 't algemeen toegepast worden zoo dikwijls de tophoek en de omtrek tot de gegevens behooren.

4. Andere vraagstukken, die nu ook kunnen opgelost worden met behulp der hierboven genoemde stelling, zijn de volgende.

a. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn de tophoek, de straal van den aangeschreven cirkel, die binnen den tophoek ligt, en een punt der grondlijn of haar verlengde.

b. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn de tophoek, de straal van den ingeschreven cirkel en de omtrek.

c. Een driehoek te construeeren, als gegeven zijn de tophoek, de omtrek en het oppervlak. (Als de omtrek en het oppervlak gegeven zijn, kan men den straal van den ingeschreven cirkel construeeren).

§ 79. VRAAGSTUKKEN. 1. Door een gegeven punt een rechte lijn te trekken, waarvan door twee gegeven evenwijdige lijnen een stuk van gegeven lengte wordt afgesneden.

2. Een cirkel te beschrijven, die door een gegeven punt gaat en raakt aan twee gegeven elkaar snijdende rechte lijnen.

3. Een gelijkbeenigen driehoek te beschrijven, als gegeven zijn: het toppunt, twee evenwijdige lijnen, waarin de uiteinden der grondlijn moeten liggen, en de hoek, waaronder de grondlijn die twee evenwijdige lijnen snijdt.

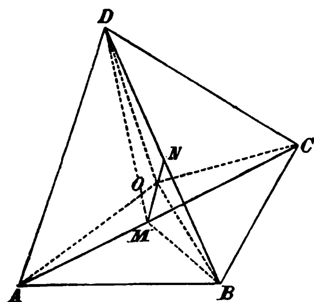
HET ALGEMEENER MAKEN VAN EEN EIGENSCHAP.

---

§ 80. Hierboven hadden we telkens bij het weglaten van een gegeven een onbepaald vraagstuk. Het gegeven, dat men weglaat, kan echter van dien aard zijn, dat een stelling eenvoudig iets meer algemeen wordt. Bv. wanneer men een stelling heeft bewezen van een vierhoek, waarom een cirkel kan beschreven worden, kan men de vraag stellen, of de eigenschap ook geldt voor een geheel willekeurigen vierhoek. Men komt hiertoe, wanneer de voorwaarde, dat om den vierhoek een cirkel kan worden beschreven, moeilijk in rekening is te brengen. In 't algemeen kan men zeggen: Het algemeener maken van een stelling levert het voordeel op, dat men op een of meer gegevens minder moet letten. En het groote aantal gegevens is soms een bezwaar in het overzien van 't geheel. Het kan daardoor gebeuren, dat een algemeene eigenschap gemakkelijker te bewijzen is dan een bijzonder geval van die eigenschap, ofschoon in den regel het omgekeerde zal plaats hebben.

§ 81. Stelling. *In een omgeschreven vierhoek ligt het middelpunt van den ingeschreven cirkel op de rechte lijn, die door de middens van de diagonalen gaat.* (Newton).

Fig. 41.



Bewijs. Zij ABCD de vierhoek en O het middelpunt van den ingeschreven cirkel. Laat ons uit de vele betrekkingen tusschen O en den vierhoek de volgende kiezen:

$\triangle$ OAB + $\triangle$ OCD = $\triangle$ OBC + $\triangle$ ODA . . . . (1)

Nu zou de stelling bewezen zijn, indien was aangetoond, dat de meetkundige plaats der punten, O, die aan de voorwaarde (1) vol-

doen, bij een omgeschreven vierhoek, een rechte lijn is, die door het midden der twee diagonalen gaat. Als wij trachten deze eigenschap te bewijzen, is het echter gemakkelijk, om de voorwaarde, dat in den vierhoek een cirkel kan worden beschreven, ter zijde te laten.

We kunnen voor de verg. (1) schrijven

$$\triangle OAB - \triangle OBC = \triangle OAD - \triangle OCD,$$

en als M en N de middens der diagonalen AC en BD zijn, heeft men $\triangle OAB - \triangle OBC = 2 \triangle OMB; \ldots (2)$
want deze 3 driehoeken hebben de grondlijn OB gemeen en verhouden zich dus als de afstanden van A, C en M tot OB. Op dezelfde wijze heeft men

$$\triangle OAD - \triangle OCD = 2 \triangle OMD \ldots\ldots (3)$$

Opdat het punt O aan de verg. (1) voldoe, is dus voldoende, dat $\triangle OMB = \triangle OMD$
en dit eischt, dat de driehoeken OMB en OMD, die de grondlijn OM gemeen hebben, hun toppunten B en D op gelijke afstanden van OM hebben, of wat op hetzelfde neerkomt, dat OM gaat door het midden N van BD, of m. a. w., dat O op de lijn ligt, die door de middens M en N van de twee diagonalen gaat.

We hebben nu deze eigenschap bewezen: *In een willekeurigen vierhoek ABCD is de meetkundige plaats der punten O, waarvoor men heeft*

$$OAB + OCD = OBC + ODA$$

een rechte lijn, die door de middens der twee diagonalen van den vierhoek gaat.

§ 82. Tegenover het algemeener maken van een eigenschap staat het kiezen van een bijzonder geval. Waar men zoekt naar een oplossing, wijst soms de onmiddellijke aanschouwing den weg aan, dien we bij onze redeneering volgen. Om de rechtstreeksche aanschouwing gemakkelijker te maken, is het soms wenschelijk een bijzonder geval te nemen, door bv. een gegeven hoek als recht te beschouwen. Heeft men een oplossing gevonden voor dat bijzondere geval, dan kan men zulk een oplossing dikwijls overbrengen op het algemeene geval.

DE METHODE DER OMKEERING.

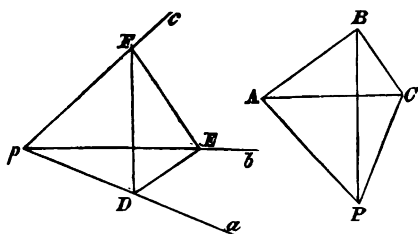
---

§ 83. Bij sommige werkstukken kan men gemakkelijk een figuur krijgen, dat congruent of gelijkvormig is met het gevraagde, door het vraagstuk om te keeren, dat wil zeggen: door de gevraagde figuur als bekend te beschouwen en de bekende als gevraagd.

WERKSTUK. *Een driehoek te construeeren, die congruent is met een gegeven driehoek en waarvan de hoekpunten op drie rechte lijnen liggen, die in één punt samenkomen.*

Laat ABC de gegeven driehoek, *pa*, *pb* en *pc* de gegeven lijnen zijn, terwijl A op *pa* moet komen, B op *pb* en C op *pc*. Beschouwen wij de ligging van den driehoek ABC als bekend en zoeken wij drie lijnen, die door één punt gaan en hoeken vormen gelijk aan *apb* en *bpc*.

Fig. 42



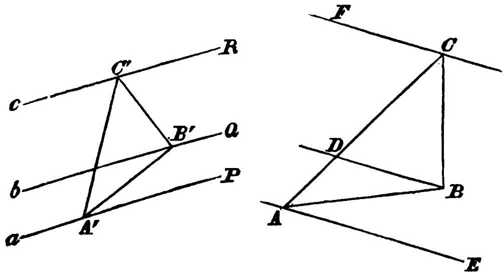
Daartoe beschrijven we op AB als koorde een cirkelsegment, dat een hoek bevat, die gelijk is aan $\angle$ *abp* en op BC als koorde een segment, dat een hoek bevat gelijk *bpc*. Als die segmenten elkaar snijden in P en men trekt uit P lijnen door A, B en C, dan krijgt men een figuur, dat alleen in stand verschilt van het gevraagde. Nemen we pD = PA, pE = PB en pF = PC en trekt men DE, EF en FD, dan is dr. DEF de verlangde.

§ 84. WERKSTUK. *Een driehoek te beschrijven, die gelijkvormig is aan een gegeven driehoek en met zijn hoekpunten in drie gegeven evenwijdige lijnen ligt.*

Beschouwen wij de ligging en de grootte van den driehoek ABC als bekend, dan krijgen wij een figuur, dat gelijkvormig

is aan het gevraagde, als we door de hoekpunten A, B en C drie lijnen trekken, wier onderlinge afstanden zich verhouden als die van de gegeven lijnen *a*, *b*, en *c*. Als het hoekpunt, dat gelijkstandig is met B, op de middelste lijn moet liggen, zal de lijn door B te trekken AC verdeelen in twee stukken, die zich verhouden als de afstanden van *b* tot *a* en *c*. Bepalen wij dus het punt D zoodanig,

Fig. 43.



dat AD en CD zich verhouden als die afstanden. Trekken wij een rechte lijn door B en D en door A en C lijnen, die evenwijdig loopen met BD, dan krijgt men een figuur, dat gelijkvormig is met het gevraagde. Nemen wij op *a* een willekeurig punt A′, trekken wij A′B′ zoodanig, $\angle$ B′A′P = $\angle$ BAE, A′C′ zoodanig, dat $\angle$ PA′C′ = EAC, en vereenigen wij B′ met C′, dan is A′B′C′ de gevraagde driehoek.

§ 85. Werkstuk. *Aan een gegeven cirkel een raaklijn te trekken, waarvan een stuk van bepaalde lengte wordt afgesneden door twee rechte lijnen, die in het middelpunt van den cirkel samenkomen.*

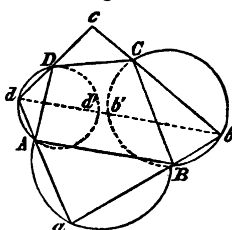
Onderstellen wij, dat de raaklijn niet alleen in grootte maar in ligging gegeven is. We moeten dan, om het middelpunt van den cirkel te vinden, een driehoek construeeren, waarvan bekend zijn de grondlijn, de tophoek en de hoogte; dien driehoek kunnen we construeeren. Nemen we daarna op de gegeven lijnen, die door het middelpunt van den cirkel gaan, twee stukken, die gelijk zijn aan de opstaande zijden van den driehoek, dan krijgt men de uiteinden der verlangde raaklijn.

§ 86. Werkstuk. *In een gegeven vierhoek P een vierhoek te beschrijven, die gelijkvormig is met een anderen vierhoek Q.*

Keeren wij de vraag om, d. w. z. trachten wij *om* den vierhoek Q een vierhoek te beschrijven, die gelijkvormig is met P. Zij ABCD de vierhoek Q, waarom een vierhoek *abcd* beschreven is, die gelijkvormig is met P. Daar de hoeken *a*, *b* en *d*

bekend zijn, liggen de punten a, b en d in cirkelsegmenten, die AB, BC en AD tot koorden hebben en de gegeven hoeken bevatten. Die segmenten kan men construeeren. Trekken wij de lijn bd, die de segmenten op BC en AD beschreven ontmoet in b' en d', dan blijkt gemakkelijk, dat we de punten b' en d' kunnen bepalen, zonder b en d te kennen. Daar nl. de vierhoek $abcd$ gelijkvormig moet zijn met een gegeven vierhoek, is dr. abd gelijkvormig met een gegeven driehoek, zoodat de hoeken abd en adb bekend zijn en bijgevolg de bogen Ad' en Bb', waarop die hoeken staan als omtrekshoeken. Heeft men met behulp hiervan b' en d' gevonden, dan krijgt men b en d, door de lijn $b'd'$ te verlengen tot zij de segmenten, op AD en BC beschreven, ontmoet. Zijn b en d bekend, dan vindt men gemakkelijk a en c, en hiermee is het omgekeerde vraagstuk opgelost. We hebben nu een figuur, die gelijkvormig is met de gevraagde, en ons leert in welke verhoudingen de hoekpunten van den gevraagden vierhoek de zijden van den vierhoek verdeelen, waarin hij moet beschreven worden.

Fig. 44.



Bespreking. De constructie is altijd uitvoerbaar, en men vindt 8 oplossingen. Om dit te zien, merken wij op, dat bij de oplossing van het omgekeerde werkstuk, terwijl a overeenkomt met de zijde AB, b kan overeenkomen met BC en ook met AD. Dit geeft dus 2 oplossingen, als a overeenkomt met een enkele zijde van ABCD Maar a kan overeenkomen met elk der vier zijden van ABCD, zoodat men 4×2 oplossingen krijgt van het hulpvraagstuk; en met elke oplossing van het omgekeerde vraagstuk komt een oplossing overeen van het oorspronkelijke werkstuk.

§ 87. Het laatste voorbeeld is ontleend aan Lamé, examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie, 1818. Deze schrijver en in navolging van hem ook Rouché et de Comberousse en Paul Serret, meenen ten onrechte, dat de methode der omkeering altijd leidt tot een figuur, dat gelijkvormig is met het gevraagde. Bij de voorbeelden, die zij kiezen, is dat wel telkens het geval, maar het eerste voorbeeld, dat wij hierboven kozen, bewijst het tegendeel.

Uit de verschillende voorbeelden, die hier behandeld zijn, blijkt, dat de methode vooral van toepassing is, als de gevraagde figuur een bepaalden stand moet innemen. Men kiest dien stand voorloopig willekeurig en krijgt al naar den aard van het vraagstuk een figuur, die congruent of gelijkvormig is met de verlangde figuur.

§ 88. Vraagstukken. 1. Een driehoek te beschrijven, waarvan een hoekpunt gegeven is, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek, en waarvan de andere hoekpunten op twee rechte lijnen liggen, die door één punt gaan.

2. Een driehoek te beschrijven, waarvan een hoekpunt gegeven is, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek en waarvan de andere 2 hoekpunten in twee evenwijdige lijnen liggen.

3. Beschrijf een vierkant in een gegeven willekeurigen vierhoek.

4. Door een punt van de lijn, die een hoek middendoor deelt, een rechte lijn te trekken, waarvan het stuk, dat binnen den hoek ligt, een bepaalde lengte heeft.

5. Een gelijkzijdigen driehoek te beschrijven, waarvan de hoekpunten in de omtrekken van drie gegeven concentrische cirkels liggen.

6. In een gegeven driehoek ABC een driehoek te beschrijven, die gelijkvormig is met een tweeden gegeven driehoek MNP en met een hoekpunt in punt D van AB ligt. (Dit vraagstuk is vroeger opgelost door de methode der meetkundige plaatsen. Men losse het hier op met behulp van de methode der omkeering.)

§ 89. De methode der omkeering heeft eenige overeenkomst met de volgende handelwijze. Moet men bewijzen, dat een rechte lijn, die door twee gegeven punten gaat, ook door een derde gegeven punt gaat, en is het minder gemakkelijk om dat rechtstreeks te bewijzen, dan tracht men te bewijzen, dat de rechte lijn, die door het derde punt gaat en een der twee, ook door het andere punt zal gaan. Zoo ja, dan is de stelling bewezen, want als de rechte lijn, die door A en C gaat, tevens door B gaat, en de lijn, die door A en B gaat, ging niet tevens door C, dan zou men door dezelfde twee punten, A en B, twee verschillende rechte lijnen kunnen trekken.

VOORBEELD. *Bewijs, dat de rechte lijn, die de evenwijdige zijden van een trapezium middendoor deelt, door het snijpunt der hoeklijnen gaat.*

Men bewijst, dat de rechte lijn, die door het snijpunt der hoeklijnen en het midden der eene evenwijdige zijde gaat, ook door het midden der andere evenwijdige zijde zal gaan.

§ 90. STELLING. *De rechte lijn, die de middens der beenen van een trapezium vereenigt, deelt de hoeklijnen middendoor.*

Men bewijst, dat de rechte lijn, die een been en een hoeklijn halveert, ook het andere halveert. Deelde nu de rechte lijn, die de middens der beenen vereenigt, niet de diagonalen middendoor, dan zou men door de middens der beenen twee verschillende rechte lijnen kunnen trekken.

§ 91. Moet men bewijzen, dat een cirkelomtrek, die door A, B en C gaat, ook door D zal gaan, dan kan men op dezelfde wijze handelen. Men betooge bv. dat de cirkelomtrek, die door B, C en D gaat, tevens door A zal gaan, dan is het gestelde ook waar. Ging nl. een cirkelomtrek door A, B en C, zonder door D te gaan, dan zou er behalve deze cirkelomtrek nog een andere cirkelomtrek zijn, die door A, B en C gaat, en dat is onmogelijk.

VRAAGSTUKKEN. 1. In een gegeven cirkel een driehoek te beschrijven, wiens zijden evenwijdig loopen met die van een gegeven driehoek.

2. Evenzoo van een koordenvierhoek.

3. Gegeven zijn drie rechte lijnen a, b en c, die elkaar snijden in een zelfde punt, en twee lijnen m en n van bepaalde lengte. Men vraagt een rechte lijn te trekken, waarvan het stuk dat tusschen a en b ligt, gelijk is aan m, en het stuk, dat tusschen b en c ligt, gelijk aan n.

4. Een rechte lijn te trekken, waarvan stukken van gegeven grootte worden afgesneden door de beenen van een hoek en de rechte lijn, die den hoek middendoor deelt.

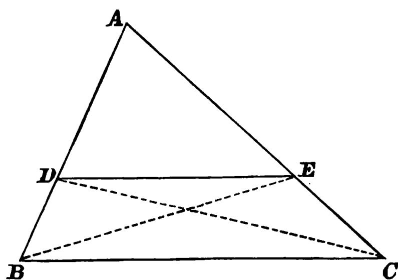
5. Gegeven zijn twee raaklijnen aan een cirkel. Een derde raaklijn te trekken, waarvan door de eerste twee een stuk van gegeven lengte wordt afgesneden.

HET INVOEREN VAN OPPERVLAKKEN.

§ 92. Soms krijgt men een beknopt bewijs, door de verhouding van twee lijnen te vervangen door de verhouding van twee oppervlakken.

Behandelt men in de vlakke meetkunde de oppervlakken van rechthoeken en veelhoeken in 't algemeen vóór de gelijkvormigheid, dan kan men de eigenschap betreffende de lijn, die in een driehoek evenwijdig aan een zijde loopt, bewijzen met behulp der eigenschap, dat twee driehoeken, die de hoogte gelijk hebben, zich verhouden als hun grondlijnen.

Fig. 45.



Zij DE evenwijdig met BC, dan is driehoek BDC = drieh. BEC.

Hieruit volgt dat drieh. ADC = drieh. AEB. Nu hebben de driehoeken ADC en ABC, als men AD en AB tot grondlijnen neemt, de hoogte gelijk. Men heeft dus

Opp. ADC : Opp.. ABC = AD : AB.

Evenzoo Opp. AEB : Opp.. ABC = AE : AC.

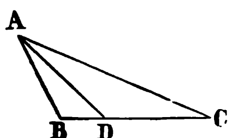
Van deze twee evenredigheden zijn de eerste termen gelijk evenals de tweede. De tweede redens zijn derhalve gelijk, waarmee de stelling bewezen is.

Ook bij andere stellingen kan men met vrucht gebruik maken van die eigenschap of van de volgende.

De oppervlakken van twee driehoeken, die een hoek gelijk hebben, verhouden zich als de produkten der zijden om dien hoek. (Deze eigenschap gaat ook nog door als de hoeken niet gelijk zijn, maar elkaars supplement.)

§ 93. Eigenschap. *De rechte lijn, die den tophoek van een driehoek middendoor deelt, verdeelt de grondlijn in twee stukken, die evenredig zijn met de aangrenzende opstaande zijden.*

Fig. 46.



Bewijs. Als AD den tophoek A middendoor deelt, hebben de driehoeken ABD en ACD een hoek gelijk, zoodat

Opp. ABD : *Opp.* ACD = AB × AD : AC × AD of

Opp. ABD : *Opp.* ACD = AB : AC.

De twee driehoeken hebben ook, indien men BD en CD als twee grondlijnen beschouwt, de hoogten gelijk, zoodat

Opp. ABD : *Opp.* ACD = BD : CD.

Deze evenredigheid en de voorgaande hebben de eerste redens gelijk, en dus ook de tweede, zoodat

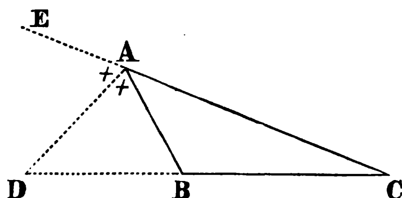
BD : CD = AB : AC.

Opmerking. Wij kunnen deze eigenschap ook uitdrukken, door te zeggen: *de rechte lijn, die den tophoek van een driehoek middendoor deelt, snijdt de grondlijn in een punt, welks afstanden tot de uiteinden der grondlijn zich verhouden als de aangrenzende opstaande zijden.*

§ 94. Eigenschap. *Als de rechte lijn, die een topbuitenhoek van een driehoek middendoor deelt, het verlengde der grondlijn ontmoet, is het snijpunt van de uiteinden der grondlijn verwijderd op afstanden, die zich verhouden als de aanliggende opstaande zijden.*

Bewijs. Zij ABC de driehoek en AD de rechte lijn, die den topbuitenhoek BAE middendoor deelt en het verlengde der grondlijn snijdt in D. Nu volgt uit ∠DAE + ∠DAC = ∠ 180° volgens het onderstelde, dat ook ∠ DAB + ∠ DAC = 180°. De oppervlakken der driehoeken DAB en DAC verhouden zich dus als de produkten der zijden om de hoeken DAB en DAC. We hebben nu

Fig. 47.



Opp. ABD : *Opp.* ADC = AD × AB : AD × AC

of *Opp.* ABD : *Opp.* ADC = AB : AC.

Die twee driehoeken hebben ook, indien men BD en CD als twee grondlijnen beschouwt, de hoogten gelijk, zoodat

$$\textit{Opp.}\ ABD : \textit{Opp.}\ ACD = BD : CD.$$

Deze evenredigheid en de voorgaande hebben de eerste redens gelijk, en dus ook de tweede, zoodat

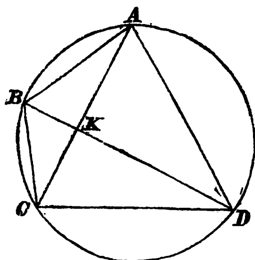
$$BD : CD = AB : AC.$$

Opmerking. De bewijzen van deze en de vorige § hebben het voordeel, dat er geen hulplijnen bij noodig zijn.

§ 95. Stelling. *De hoeklijnen van een ingeschreven vierhoek verhouden zich als de sommen van de produkten der zijden, die in haar uiteinden samenkomen.* Zie fig. 48.

Bewijs. Stellen we AB voor door a, BC door b, CD door c, DA door d, AC door h en BD door l, dan hebben we vooreerst

Fig. 48.



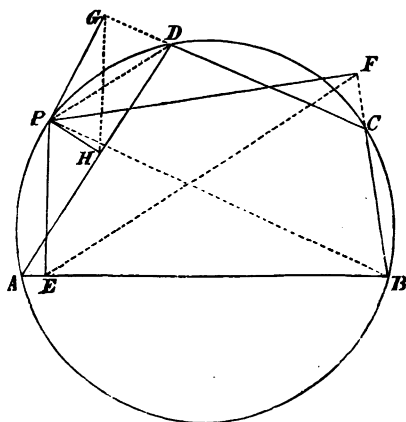
$$ABC : ADC = BK : DK$$
$$ab : \quad cd = BK : DK$$
$$(ab + cd) : \quad l = \ ab : BK$$

Verder is ook

$$BCD : ABD = CK : AK$$
$$bc : \quad ad = CK : AK$$
$$(bc + ad) : \quad h = \ bc : CK.$$

De derde en de zesde evenredigheid hebben de tweede redens gelijk en dus ook de eerste; waarmee het gestelde bewezen is.

Fig. 49.



§ 96. Stelling. *De produkten der loodlijnen, die men uit een willekeurig punt van een cirkel kan neerlaten op de overstaande zijden van een vierhoek, welke in dien cirkel is beschreven, zijn gelijk.*

Gestelde. PE × PG = PF × PH.

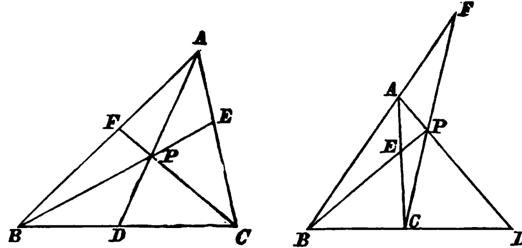
Bewijs. Vereenig P met A, B, C en D, dan is

Loodlijn op AB=PA×PB : 2R
„ „ CD=PC×PD : 2R
„ „ BC=PB×PC : 2R
„ „ AD=PA×PD : 2R

Dus loodlijn op AB × ll. op CD = ll. op BC × ll. op AD.

§ 97. Aan een opstel van Corneille Landré ontleen ik de volgende 2 voorbeelden.

Fig. 50.



Door een punt P binnen of buiten een driehoek ABC trekken wij drie lijnen, die elk door een hoekpunt gaan en welke de zijden of haar verlengden snijden: BC in D, CA in E, AB in F. (Zie figuur 50).

Zoo is:

$$\frac{\triangle APF}{\triangle DPC} = \frac{AP \times FP}{DP \times CP}, \quad \frac{\triangle BPD}{\triangle EPA} = \frac{BP \times DP}{EP \times AP}, \quad \frac{\triangle CPE}{\triangle FPB} = \frac{CP \times EP}{FP \times BP}.$$

Door deze drie vergelijkingen te vermenigvuldigen, heeft men:

$$\frac{\triangle APF}{\triangle DPC} \times \frac{\triangle BPD}{\triangle EPA} \times \frac{\triangle CPE}{\triangle FPB} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waarvoor men ook kan schrijven:

$$\frac{\triangle APF}{\triangle FPB} \times \frac{\triangle BPD}{\triangle DPC} \times \frac{\triangle CPE}{\triangle EPA} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

of ook $\triangle APF \times \triangle BPD \times \triangle CPE = \triangle FPB \times \triangle DPC \times \triangle EPA$.

Verder is

$$\frac{\triangle APF}{\triangle FPB} = \frac{AF}{FB}, \quad \frac{\triangle BPD}{\triangle DPC} = \frac{BD}{DC}, \quad \frac{\triangle CPE}{\triangle EPA} = \frac{CE}{EA}.$$

Derhalve

$$\frac{\triangle APF}{\triangle FPB} \times \frac{\triangle BPD}{\triangle DPC} \times \frac{\triangle CPE}{\triangle EPA} = \frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

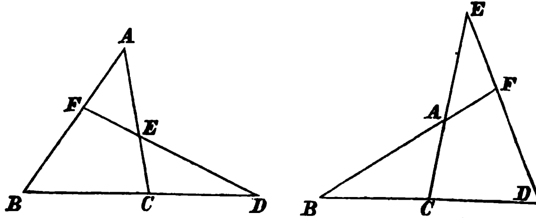
Uit (2) en (3) volgt:

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1;$$

of $AF \times BD \times CE = FB \times CD \times EA$.

Een rechte lijn snijde de zijden van een driehoek of haar verlengden BC in D, CA in E, AB in F. (Zie fig. 51).

Fig. 51.



Zoo is:

$$\frac{\triangle AEF}{\triangle CED} = \frac{AE \times EF}{CE \times ED}, \quad \frac{\triangle CED}{\triangle BFD} = \frac{CD \times ED}{BD \times FD}, \quad \frac{\triangle BFD}{\triangle AEF} = \frac{BF \times FD}{AF \times EF}.$$

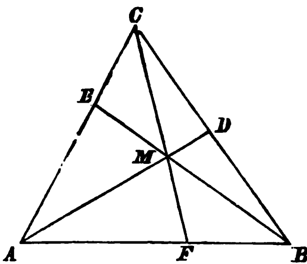
Deze drie vergelijkingen vermenigvuldigende en vereenvoudigende, heeft men terstond:

$$\frac{AE}{CE} \times \frac{CD}{BD} \times \frac{BF}{AF} = 1, \text{ of } AE \times CD \times BF = CE \times BD \times AF.$$

§ 98. STELLING. *Als men door een willekeurig punt M binnen den driehoek ABC de lijnen AD, BE en CF trekt, heeft men*

$$\frac{MF}{CF} + \frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} = 1.$$

Fig. 52.



BEWIJS. Men kan voor het eerste lid van bovenstaande vergelijking schrijven:

$$\frac{\triangle ABM}{\triangle ABC} + \frac{\triangle BCM}{\triangle ABC} + \frac{\triangle ACM}{\triangle ABC} = \frac{\triangle ABM + \triangle BCM + \triangle ACM}{\triangle ABC} = \frac{\triangle ABC}{\triangle ABC} = 1.$$

OPMERKING. Trekt men de leden der vergelijking

$$\frac{MF}{CF} + \frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} = 1 \text{ af van}$$

$$\frac{CF}{CF} + \frac{AD}{AD} + \frac{BE}{BE} = 3,$$

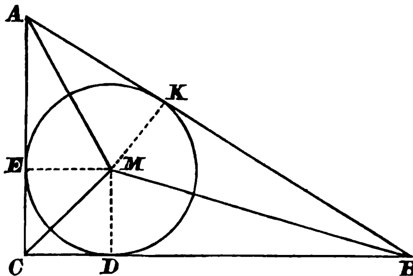
dan blijft er over

$$\frac{MC}{CF} + \frac{MA}{AD} + \frac{MB}{BE} = 2.$$

Uit deze stelling volgt gemakkelijk de volgende: *Als men door een punt binnen een driehoek drie rechte lijnen trekt, die evenwijdig loopen aan de zijden en begrensd worden door den omtrek des driehoeks, dan is de som der verhoudingen van elk dier lijnen tot de zijde, waarmee ze evenwijdig loopt, gelijk aan 2.*

§ 99. STELLING. *De lijnen, die de hoeken van een rechthoekigen driehoek middendoor deelen, vormen van haar snijpunt tot de hoekpunten met de schuine zijde een evenredigheid.*

Fig. 53.



De lijnen, die de hoeken van een driehoek middendoor deelen, komen samen in het middelp. van den ingeschreven cirkel.

Verder blijkt gemakkelijk, dat $\angle CME = 45°$ en $\angle AMB = 135°$. Die 2 hoeken zijn dus elkaars supplement. We hebben derhalve

$$\triangle CEM : \triangle AMB = CE \times CM : AM \times BM.$$

Maar als men in die driehoeken CE en AB als grondlijnen beschouwt, hebben ze de hoogte gelijk. Men heeft dus ook

$$\triangle CEM : \triangle AMB = CE : AB$$

Uit die 2 evenredigheden volgt

$$CE \times CM : AM \times BM = CE : AB.$$
$$CM : AM \times BM = 1 : AB.$$
$$CM : AM = BM : AB.$$

OPMERKING. In § 81 van dit boek is ook reeds gebruik gemaakt van oppervlakken voor het bewijzen van een stelling.

Twee andere voorbeelden vindt men in § 310 en 311 van mijn Handboek der Vl. Meetk. 3e druk.

§ 100. VRAAGSTUKKEN. 1. Als men uit een punt binnen een gelijkzijdigen driehoek loodlijnen neerlaat op de drie zijden, is de som dier drie loodlijnen gelijk aan een hoogtelijn van den driehoek, of constant. Bewijs dat.

Hoe kan men de stelling uitbreiden voor punten buiten den gelijkzijdigen driehoek?

2. Als men uit een punt binnen een regelmatigen vijfhoek loodlijnen neerlaat op de zijden van den vijfhoek, is de som dier loodlijnen gelijk aan 5 maal het apothema van den regelmatigen vijfhoek. Bewijs dit.

Breid de eigenschap uit voor punten buiten den vijfhoek.

3. Breid de eigenschap uit voor den regelmatigen n-hoek.

4. Uit een punt trekt men 2 raaklijnen aan een cirkel en laat uit het eene raakpunt een loodlijn op de andere raaklijn neer. Bereken die loodlijn, zoo de straal 6 en de afstand van het punt tot het middelpunt 10 is.

Ex. Milit. Akad. 1878.

5. Als p, q en r de afstanden zijn van de hoekpunten A, B en C eens driehoeks tot het snijpunt der hoogtelijnen, is

$$\text{Opp. dr.} = \tfrac{1}{4}\,(pa + qb + rc).$$

Bewijs dit.

6. De rechte lijn, die hoek A van driehoek ABC middendoor deelt en gemeten wordt tot aan de overstaande zijde, wordt door de lijnen, die hoek B en hoek C middendoor deelen, verdeeld in 2 stukken, die tot elkaar staan als $a : (b + c)$. Bewijs dit.

7. Als men de zijden van een koordenvierhoek verlengt, tot zij elkaar ontmoeten, is het produkt van 2 der verlengden gelijk aan het produkt der andere twee, waarbij de factoren van een zelfde produkt voorgesteld worden door rechte lijnen, die geen uiteinde gemeen hebben.

EVENWIJDIGE VERPLAATSING.

---

§ 101. Men kan zich van een rechte lijn voorstellen, dat zij in het vlak, waarin ze gelegen is, zoodanig bewogen wordt, dat ze steeds evenwijdig blijft aan den stand, dien ze eerst innam. Geschiedt de beweging verder zóó, dat één punt der rechte lijn een rechte lijn doorloopt, dan is dit ook het geval met elk ander punt der bewegende lijn. Men zegt dan, *dat de rechte lijn evenwijdig wordt verplaatst.*

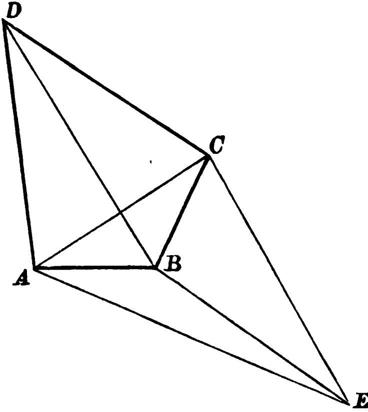
Om een trapezium te construeeren, waarvan de 4 zijden gegeven zijn, stellen we ons voor, dat het trapezium verdeeld is in een driehoek en een parallelogram. We hebben vroeger gezegd, dat men die figuur krijgt, door de kleinste evenwijdige zijde af te passen op de grootste of door het trekken eener evenwijdige lijn. Somtijds zegt men, dat een der beenen evenwijdig aan zich zelf wordt verplaatst, tot het een uiteinde gemeen heeft met het andere been. Men zegt dan, dat het werkstuk wordt opgelost door evenwijdige verplaatsing.

Het voordeel van die handelwijze is, dat men bekende elementen zoo bij elkaar plaatst, dat men eenvoudige figuren krijgt, waarin die elementen voorkomen. Die eenvoudige figuren zijn bij voorkeur driehoeken of parallelogrammen.

§ 102. Komen bij een trapezium als gegevens voor: één of twee diagonalen en de hoek, waaronder de diagonalen elkaar snijden, dan ligt het voor de hand, om de eene diagonaal evenwijdig te verplaatsen, tot zij een uiteinde gemeen heeft met de andere diagonaal. Men krijgt dan een driehoek, waarin die hoek voorkomt en waarvan twee zijden gelijk zijn aan de diagonalen van het trapezium. De derde zijde van den driehoek is gelijk aan de som der evenwijdige zijden van het trapezium.

§ 103. Verplaatst men bij een willekeurigen vierhoek ABCD de diagonaal BC evenwijdig tot zij in CE komt en trekt men bovendien AE, dan ontstaat evenals bij het trapezium een driehoek ACE, waarin de twee diagonalen en de hoek, waaronder zij elkaar snijden, als elementen voorkomen.

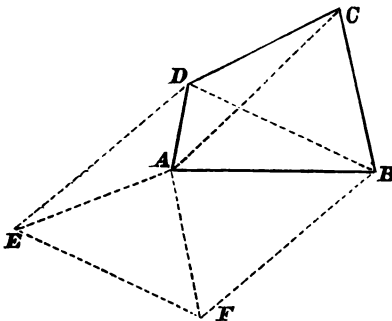
Fig. 54.



Er ontstaat dan tevens een driehoek ABE, die twee overstaande zijden van den vierhoek tot zijden heeft, en waarin de tusschenliggende hoek gelijk is aan de som van twee hoeken des vierhoeks of aan 360° min die som, zooals in fig. 54.

§ 104. Een figuur, dat in veel gevallen doelmatig is, verkrijgt men, door de eene diagonaal BD van een vierhoek evenwijdig te verplaatsen in de richting van de andere diagonaal. Er ontstaat dan een parallelogram BDEF. Verbindt men verder A met E en F, dan ontstaan nog 2 andere parallelogrammen, en bij het punt A heeft men 4 lijnen, die de richting der 4 zijden aangeven. Bij A heeft men dus de 4 hoeken van den vierhoek ABCD.

Fig. 55.



Omtrent het parallelogram BDEF valt op te merken:

dat zijn zijden gelijk zijn aan de diagonalen van ABCD;

dat zijn hoeken gelijk zijn aan de hoeken, die de diagonalen van ABCD met elkaar maken;

dat zijn diagonalen het dubbele zijn van de lijnen, die in ABCD de middens der overstaande zijden vereenigen;

dat zijn oppervlak gelijk is aan tweemaal dat van ABCD.

Moet nu een vierhoek geconstrueerd worden uit eenige zijner elementen, diagonalen, hoeken tusschen de diagonalen, enz., dan kan men zich meestal met vrucht bedienen van fig. 54 of fig. 55.

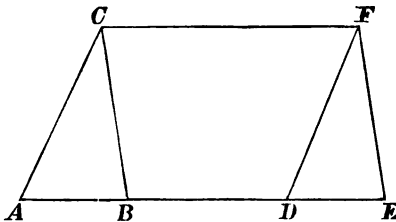
---

§ 105. We hebben vroeger gezien, hoe men eigenschappen kan bewijzen door middel van oppervlakken, die in de figuur aanwezig zijn. Thans zullen we laten zien, hoe men met vrucht gebruik kan maken van oppervlakken, die doorloopen worden door rechte lijnen eener figuur, wanneer deze zoo bewogen wordt, dat alle punten gelijke en evenwijdige rechte lijnen doorloopen.

Wordt een rechte lijn evenwijdig verplaatst, dan doorloopt zij een parallelogram. Is een rechte lijn in twee deelen verdeeld, dan doorloopen die deelen bij een evenwijdige verplaatsing der lijn oppervlakken, welke evenredig zijn met die deelen, en omgekeerd.

Wordt een driehoek ABC evenwijdig verplaatst in de richting van een der zijden AB, dan doorloopt deze zijde een rechte lijn. De punten B en C doorloopen gelijke en evenredige lijnen BE en CF. Er ontstaat dus een trapezium, waarbij ACFD de oppervlakte is, doorloopen door AC, en BCFE de oppervlakte, doorloopen door BC. Die twee oppervlakken zijn gelijk. We hebben dus de volgende stelling:

Fig. 56.



Als een driehoek evenwijdig verplaatst wordt in de richting van een zijner zijden, dan doorloopen de andere zijden gelijke oppervlakken.

We zullen nu aan enkele voorbeelden laten zien, hoe men deze eigenschap kan aanwenden tot het bewijzen van andere eigenschappen, zonder de oppervlakken waarvan sprake is, te teekenen.

§ 106. EIGENSCHAP. *Als een rechte lijn een zijde van een driehoek middendoor deelt en op het verlengde van een andere zijde een stuk afsnijdt, gelijk van die zijde zelf, dan verdeelt zij de derde zijde in stukken, die zich verhouden als* 1 *tot* 2, *terwijl op de lijn zelf stukken worden afgesneden, die zich verhouden als* 1 *tot* 3.

1°. Zij EF de richting der evenwijdige verplaatsing, dan is, als we op driehoek AEF letten:

opp. AF = opp. AE = 2 opp. BE.

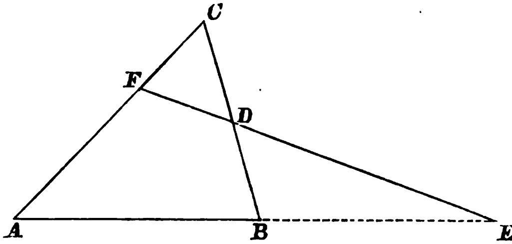
Letten we nu op driehoek BDE, dan is

2 opp. BE = 2 opp. BD = 2 opp. CD.

Letten we verder op driehoek CDF, dan is

2 opp. CD = 2 opp. CF.

Fig. 57.

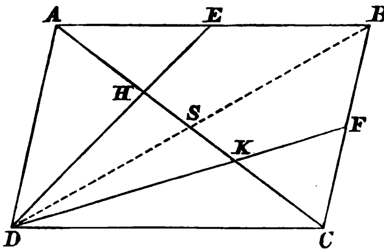


We hebben dus: opp. AF = 2 opp. CF, en hieruit volgt, dat AF = 2 CF.

2°. Zij BC de richting der evenwijdige verplaatsing, dan is opp. DE = opp. BE = opp. AB = opp. AC = 3 opp. CF (volgens 1°) = 3 opp. DF. Daar nu opp. DE = 3 opp. DF, is DE = 3 DF.

§ 107. Eigenschap. *Als men uit een hoekpunt van een parallelogram rechte lijnen trekt naar de middens der twee niet aanliggende zijden, dan verdeelen die lijnen de niet aanliggende diagonaal van het parallelogram in* 3 *gelijke deelen.*

Fig. 58.



Zij DE de richting der evenwijdige verplaatsing, dan is opp. AH = opp. AE = opp. BE = opp. BD = 2 opp. SD = 2 opp. SH.

Daar opp. AH = 2 opp. SH, is AH = 2 SH. Hieruit volgt, dat AH = $\frac{2}{3}$ AS = $\frac{1}{3}$ AC.

Om dezelfde reden is CK = $\frac{1}{3}$AC.

Opmerking. Bovenstaande handelwijze en de twee voorbeelden zijn ontleend aan D. Mavor, Parallel Translations of lines and surfaces. Second Edition 1890.

In dat werkje zijn een groot aantal stellingen bewezen door middel van de evenwijdige verplaatsing van rechte lijnen en vlakke figuren.

Vraagstuk. Bewijs door middel der evenwijdige verplaatsing, dat de 3 zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan.

VERBINDING VAN VERSCHILLENDE METHODEN.

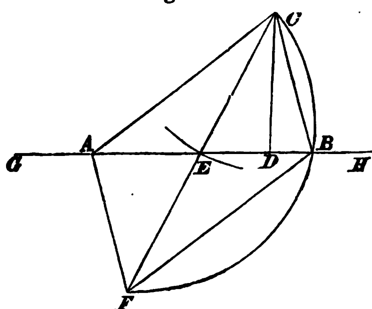
---

§ 108. Bij verschillende vraagstukken is het noodig of wenschelijk, om niet een maar twee of meer van de voorgaande methoden toe te passen. Bij enkele voorbeelden is dit reeds gebleken; wij zullen hier nog een paar voorbeelden geven van de verbinding van twee of meer methoden in een zelfde vraagstuk.

Werkstuk. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de tophoek, de hoogte en de rechte lijn, die het midden der grondlijn verbindt met het toppunt.*

Oplossing. Zij ABC de gevraagde driehoek, waarin AB de grondlijn, CD de hoogte en CE de lijn, die C verbindt met het midden van AB. Het blijkt terstond, dat in den rechthoekigen driehoek CED, twee zijden bekend zijn, zoodat we hem kunnen construeeren. Het komt er nu nog op aan de ligging van A of B in de lijn ED te bepalen. Verlengen we CE en nemen we EF = CE, dan moet het punt B zoodanig liggen, dat ∠ CBF het supplement is van ∠ ACB. B is dus het snijpunt der lijn ED met den boog van het segment, dat CF tot koorde heeft en een hoek bevat, die het supplement is van den gegeven hoek. Is B bekend, dan vindt men A, door EA = EB te nemen.

Fig. 59.



Opmerkingen. 1. We hebben in het bovenstaande voorbeeld zoowel de analytische methode als de methode der meetkundige plaatsen toegepast.

2. Door het trekken van de lijnen AF en FB ontstaat een

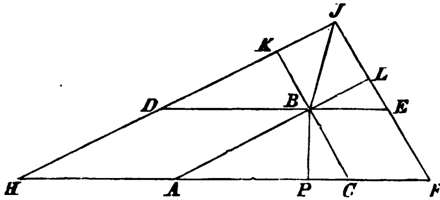
vierhoek, waarvan de diagonalen elkaar halveeren, dat is een parallelogram.

3. Door CE te verlengen tot in F en verder CF als grondlijn te beschouwen, werden de twee gegevens: *tophoek* en *lijn*, *die het toppunt vereenigt met* het midden *der bazis*, vervangen door *tophoek en grondlijn*. Deze handelwijze kan men toepassen, zoo dikwijls dezelfde twee gegevens voorkomen.

§ 109. WERKSTUK. *Een rechthoekigen driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de som der rechthoekszijden en de hoogtelijn op de schuine zijde.*

Zij ABC de driehoek met de hoogtelijn BP. Als de som van twee zijden gegeven was, hebben wij in het voorgaande telkens de eene zijde afgepast op het verlengde van de andere. Het afpassen van AB op het verlengde van AB of omgekeerd, kan ons echter in dit geval niet tot ons doel leiden, omdat er niets bekend is van de ligging der hoogtelijn BP ten opzichte van de aldus verkregen som. We trekken daarom DE evenwijdig aan AC en dus rechthoekig op PB en nemen BD = BA, BE = BC, dan is DE bekend. Voltooien we de ruiten BH en BF, en verlengen we HD en FE, tot ze elkaar snijden in J, dan zijn ook de loodlijnen BK en BL bekend, daar beide gelijk zijn aan BP. Trekt men BJ, dan zijn de rechthoekige driehoeken BJK en BJL congruent, zoodat BJ den hoek KJL middendoor deelt. Men kan dus de lengte van BJ vinden, en er zijn van driehoek DEJ bekend: *de grondlijn DE*, *de tophoek en de rechte lijn JB die den tophoek middendoor deelt*, *gemeten tot aan de grondlijn*.

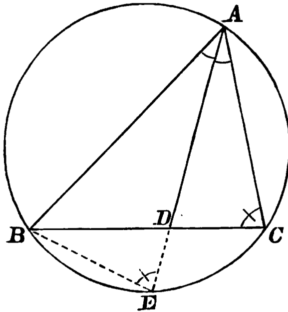
Fig. 60.



Om dezen driehoek te construeeren, merken wij op, dat als BC zijn grondlijn is, men een cirkelboog BAC kan construeeren, die zijn toppunt moet bevatten.

Om verder de ligging van punt A te bepalen, merken wij op, dat van de rechte lijnen EA en ED gegeven is haar verschil AD = b en haar produkt = $DE^2 = k^2$. We hebben dus

Fig. 61.



$$EA \times ED = k^2 \text{ en}$$
$$EA - ED = b,$$
$$(ED + b)\, ED = k^2$$
$$ED^2 + b \times ED = k^2$$
$$ED = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + k^2)}$$

Hierdoor kunnen we ED construeeren, waarna men het punt D kan vinden. Een rechte lijn door E en D getrokken levert vervolgens het toppunt A op.

Opmerking. We hebben hier de analytische methode verbonden met de methode der meetkundige plaatsen en de methode der toepassing van de algebra op de meetkunde.

§ 110. Werkstuk. *Door een punt van de rechte lijn, die een gegeven hoek middendoor deelt, een andere rechte lijn te trekken, waarvan de beenen van den gegeven hoek een rechte lijn van gegeven lengte afsnijden.*

Hier is de ligging van den hoek en van het punt binnen den hoek bekend, terwijl de ligging moet bepaald worden van een rechte lijn. Passen wij in de eerste plaats de *methode der omkeering* toe, door de ligging van de rechte lijn als bekend aan te nemen. Om dan de ligging van den hoek ten opzichte van die rechte lijn te bepalen, moeten wij een driehoek construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn, de tophoek en de rechte lijn, die den tophoek middendoor deelt. En dezen driehoek kunnen wij even als in de vorige § construeeren door *toepassing van de algebra op de meetkunde* en door middel van de *methode der meetkundige plaatsen.* Is deze driehoek geconstrueerd, dan wijzen zijn opstaande zijden aan, welke stukken de gevraagde lijn moet afsnijden van de beenen van den gegeven hoek.

§ 111. Werkstuk. *Een trapezium te construeeren, waarvan gegeven zijn een der evenwijdige zijden, de hoeken en de verhouding der diagonalen.*

Onderstellen wij, dat ABCD het gevraagde trapezium zij met de gegeven zijde AB. We weten al dadelijk, dat driehoek ABF kan geconstrueerd worden, daar men zijn grondlijn en de twee aanliggende hoeken kent. Als E het snijpunt der hoek-

lijnen is, verhoudt AE zich tot BE als AC tot BD. In den driehoek AEB is dus bekend de grondlijn en de verhouding der opstaande zijden, zoodat we een cirkelboog kunnen construeeren, die het snijpunt E moet bevatten. Verder ligt E op de lijn, die F vereenigt met het midden H der bazis. E is dus het snijpunt van FH met den zooeven bedoelden cirkelboog.

Fig. 62.

Opmerkingen. 1. Dat E op de lijn FH ligt, bewijst men het gemakkelijkst, door te laten zien, dat het verlengde der rechte lijn, die H vereenigt met E, de zijde CD middendoor deelt. En de rechte lijn, die AB en CD halveert, gaat door F.

2. Het overgaan van de verhouding der diagonalen op de verhouding van twee zijden van drieh. ABE is slechts een uiting van het streven, om constructies van veelhoeken terug te brengen tot het construeeren van driehoeken.

3. Amiot en Desvignes lossen bovenstaand werkstuk op met behulp van de methode der gelijkvormige figuren. Deze methode levert hier echter geen voordeel op, daar men de grondlijn van een te construeeren driehoek kent, en de methode der gelijkvormige figuren dient juist, om een zijde van een driehoek of een andere vaak voorkomende lijn de plaats te doen innemen van een minder voorkomende lijn.

Werkstukken. 1. Een driehoek te construeeren, waarvan de opstaande zijden gegeven zijn, terwijl de grondlijn gelijk moet zijn aan de hoogte.

2. Een parallelogram te construeeren, als gegeven zijn: de beide diagonalen en een scherpe hoek. *Eindex. h.b.s.* 1897.

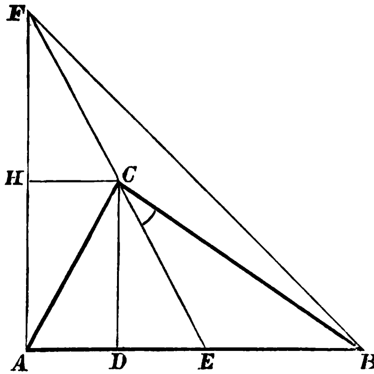
§ 112. Werkstuk. *Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de grondlijn, de hoogte en het verschil der grondhoeken.*

We beginnen met te onderstellen, dat ABC de gevraagde driehoek is met de grondlijn AB en de hoogte CD.

Daar $\angle A - \angle B$ gegeven is, trekken we in de figuur een lijn, zóo dat $\angle A - \angle B$ gevormd wordt. Dit geschiedt op

eenvoudige wijze, door DE gelijk aan AD te nemen en CE te trekken. In driehoek BCE is dan

Fig. 63.



$$\angle ECB = \angle CEA - \angle B$$
of $\angle ECB = \angle A - \angle B$

Nu is dus van $\angle$ ECB de grootte bekend, en het is de vraag, hoe men daarvan gebruik kan maken.

Verlengt men EC, tot zij de loodlijn, in A op de bazis geplaatst, ontmoet, dan is niet alleen $\angle$ BCF $= 180° - (\angle A - \angle B)$ bekend, maar ook AF $=$ 2CD.

Trekt men dus BF, dan is driehoek ABF een driehoek, die uit de gegevens rechtstreeks kan geconstrueerd worden. Verder is C het toppunt van een driehoek, die BF tot grondlijn en een hoek van bekende grootte tot tophoek heeft. De meetk. plaats van C is dus een cirkelboog.

Daar de hoogte CD bekend is, is de rechte lijn, die AF rechthoekig middendoordeelt, ook een meetk. plaats van C.

Het snijpunt van die 2 meetkundige plaatsen is het gezochte toppunt van den driehoek.

Opmerking. We hebben hier eerst de analytische methode toegepast, en vervolgens de methode der meetk. plaatsen.

OPMERKINGEN OVER HET TOEPASSEN DER VERSCHILLENDE METHODEN.

---

§ 113. Bij het bespreken der verschillende methoden hebben wij hier en daar aangewezen, wat het voordeel van een bepaalde methode is of wanneer zij bijzonder voor de hand ligt. Het is dan ook niet juist, om te zeggen, dat men bij het oplossen van vraagstukken in den blinde tast. Men meene vooral niet, dat het groote aantal der methoden, die we leerden kennen, de zaak moeilijker maakt. Vooreerst valt op te merken, dat men bij de meeste vraagstukken door meer dan een methode, dat is dus langs verschillende wegen, tot zijn doel kan geraken. Ten tweede valt op te merken, dat een groot deel der besproken methoden onder één gezichtspunt zijn gebracht door de opmerking, dat zij alle bestaan in het voorloopig ter zijde laten van een gegeven. Dit betreft:

a, de methoden der meetkundige plaatsen.

b, „ „ „ gelijkvormige figuren.

c, het weglaten van een gegeven, zonder dat men tot een der twee voorgaande methoden komt.

d, het algemeener maken van een eigenschap.

Daarbij wijzen na het weglaten van een der gegevens de overige gegevens ons als het ware van zelve aan, welke der vier zooeven genoemde methoden men moet toepassen.

§ 114. We zullen nu de verschillende vroeger gemaakte opmerkingen hier kortelijk samenvatten en vermeerderen.

De synthetische methode kan toegepast worden, als wij rechtstreeks uit het gegevene tot het gevraagde kunnen besluiten door toepassing van eigenschappen, die we reeds kennen of door toepassing van eigenschappen, die we voor het eerst aan de bedoelde figuur gevonden hebben.

De analytische methode is gewoonlijk de eenige, die tot het doel leidt, wanneer sommen of verschillen gegeven zijn, en wanneer men veelhoeken moet construeeren, waarbij men niet rechtstreeks de synthetische methode kan toepassen.

De methode der meetkundige plaatsen dient, om de ligging van een punt te bepalen en kan toegepast worden, als men hierbij niet op andere meetkundige plaatsen dan een cirkel en een rechte lijn stuit. Is onze kennis van meetkundige plaatsen te gering, dan moeten wij die uitbreiden, òf meer in 't bijzonder met het oog op het voorgestelde vraagstuk, òf in 't algemeen.

De methode der gelijkvormige figuren stelt ons in staat, om in plaats van een lijn, die als gegeven voorkomt, eenige andere lijn der figuur als gegeven te beschouwen. Zij is alleen rechtstreeks van toepassing, als onder de gegevens slechts eene lijn voorkomt. Wil men de methode toepassen, terwijl meer lijnen als gegevens voorkomen, dan moet men al deze lijnen op één na vervangen door verhoudingen.

Het weglaten van een gegeven kan men met goed gevolg toepassen, als blijkt, dat de onbepaalde figuur, die men na dat weglaten verkrijgt, gemakkelijk te construeeren is.

Het algemeen maken verdient aanbeveling, als de hoeveelheid der elementen een bezwaar is tegen het overzien van 't geheel.

Het toepassen der algebra kan dikwijls met goed gevolg geschieden, als er bekende formules zijn, die betrekkingen uitdrukken tusschen gegeven en gevraagde lijnen, of als men op eenvoudige wijze zulke betrekkingen kan vinden.

De methode der omkeering levert evenals de methode der gelijkvormige figuren het voordeel op, dat men een onbekende zaak als bekend mag aannemen. Dit is hier gewoonlijk de ligging van een bepaalde lijn of van een bepaalde figuur.

De methode der limieten wordt toegepast, als men van den cirkel eigenschappen wil bewijzen, die bekend zijn voor veelhoeken.

Het bewijs uit het ongerijmde bewijst ons diensten, als de omgekeerde stelling gemakkelijk te bewijzen is of wanneer gemakkelijk in 't oog valt, dat de ontkenning der te bewijzen eigenschap tot een ongerijmdheid voert.

Houdt men deze verschillende opmerkingen in het oog en maakt men zich goed vertrouwd met de voorbeelden, die wij

van verschillende methoden hebben gegeven, dan behoeft men niet lang te zoeken naar een goeden weg.

§ 115. De aard van hetgeen men bewijzen wil, doet ons dikwijls rechtstreeks een eigenschap aan de hand, waarvan men gebruik moet of kan maken.

Wil men bv. bewijzen, dat een rechte lijn grooter is dan een andere, zoo heeft men vooral 2 eigenschappen, die daartoe kunnen dienen. De eene leert ons, dat in een driehoek tegenover een grooteren hoek een grootere zijde staat; de tweede leert ons, dat van twee driehoeken, die twee zijden gelijk hebben en den ingesloten hoek ongelijk, de derde zijden ook ongelijk zijn, terwijl de grootere van deze 2 zijden tegenover den grooteren der twee hoeken staat.

Aan deze twee eigenschappen denke men dus in de eerste plaats, als men wil bewijzen, dat twee lijnen ongelijk zijn.

Moet men bewijzen, dat twee produkten of twee verhoudingen van rechte lijnen gelijk zijn, dan herinnere men zich, dat gelijkvormige driehoeken tot zulke betrekkingen aanleiding geven, terwijl ook bij twee elkaar snijdende koorden van een cirkel het produkt der stukken van de eene koorde gelijk is aan het produkt der stukken van de andere koorde.

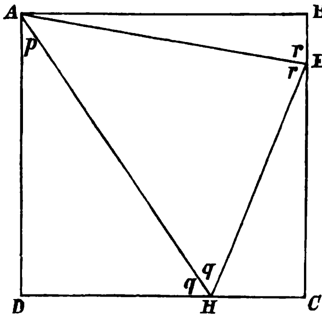
Het is volstrekt niet zeker, dat de genoemde stellingen voldoende zijn of hulp kunnen verleenen, om het beoogde doel te bereiken; maar terwijl men ze tracht toe te passen, tast men toch ook niet in den blinde rond, zooals meermalen het geval is.

§ 116 Men bedenke, dat een bepaald vraagstuk niet kan opgelost worden, zonder dat men gebruik maakt van alle gegevens. Houdt men de verschillende gegevens goed in het oog, dan wijzen die ons op verschillende plaatsen den weg aan, dien we moeten volgen. Het is me soms gebleken, dat iemand lang vergeefs zocht naar eene oplossing en daarbij steeds een gegeven geheel uit het oog verloor. Blijkt het, dat een weg, dien we bewandelen, ons niet in staat stelt om een der gegevens in rekening te brengen, dan zoeke men terstond een anderen weg op.

In een vierkant is een driehoek met een tophoek van 45 graden zoodanig beschreven, dat het toppunt in een hoekpunt van 't vierkant valt, terwijl de beide andere hoekpunten van den driehoek in de twee zijden van het vierkant vallen, welke niet in dat

hoekpunt samenkomen. Bewijs, dat deze zijden met de beenen van den driehoek scherpe hoeken vormen, die gelijk zijn aan de grondhoeken van den driehoek.

Fig. 64.



Zij ABCD het vierkant en AEH de driehoek, waarvan de tophoek EAB 45 graden bevat. We moeten dan bewijzen dat hoek AEB = hoek AEH en hoek AHD = hoek AHE.

Om dit te doen, zijn we allicht geneigd, de grootte van een der hoeken naast EHA, bv. van DAH, aan te duiden door *p*. Hoek BAE is dan $45^\circ - p$. En zoo kan men de grootte van meer hoeken uitdrukken in *p*. Wilde men nu echter trachten, alleen met behulp van die hoeken te bewijzen dat AHD = AHE, dan zou men nooit tot zijn doel geraken. Men laat nl., zoolang men met die hoeken bezig is, een der gegevens buiten rekening; nl. het gegeven, dat ABCD een rechthoek is met gelijke zijden. We moeten dus bv. de gelijkheid van AB en AD er bij in rekening brengen.

Om dit nu op een gepaste manier te doen en tevens op de hoeken te letten, stellen we ons voor, dat driehoek BAE wordt omgeslagen om de lijn AE en driehoek DAH om AH. Daar EAH $= 45^\circ$ en EAB + HAD ook 45° is, zal AB na dat omslaan van beide driehoeken samenvallen met AD. En daar AB en AD even lang zijn, valt B samen met D. Daar verder de hoeken B en D recht zijn, vallen na dat omslaan HD en BE in elkaars verlengde. B en D vallen dus samen in een punt van HE. Maar dan valt ook hoek AEB samen met hoek AEH en hoek AHD met AHE.

Hiermee is het gestelde bewezen.

§ 117. Een vraagstuk wordt gemakkelijker door ons opgelost, naarmate wij meer weten van het betrokken figuur. Heeft dus een vraagstuk betrekking op een figuur, dat ons geheel onbekend is, dan late men voorloopig het vraagstuk ter zijde, om eerst eenige eigenschappen van het figuur op te sporen. Wordt bv. gevraagd, *een vierhoek te construeeren, waarvan de zijden*

gegeven zijn en de rechte, *die de middens der twee hoeklijnen vereenigt*, en is ons van den vierhoek geen eigenschap bekend, waarin die rechte lijn voorkomt, dan beginne men met eigenschappen op te sporen van de figuur die ontstaat, als men in een vierhoek de middens der diagonalen vereenigt door een rechte lijn. Men vindt dan gemakkelijk, dat die vereenigingslijn de eene diagonaal is van een parallelogram, wanneer de andere diagonaal de lijn is, die de middens van twee overstaande zijden vereenigt, en waarvan de zijden half zoo groot zijn als twee overstaande zijden van den gegeven vierhoek.

Weet men, dat in een driehoek, waarvan de tophoek en de som der hoogtelijnen op de beenen bekend zijn, ook de som der beenen bekend is, dan kan men in werkstukken, waarbij de tophoek en de som van die hoogtelijnen gegeven zijn, eerst de som der opstaande zijden bepalen, waardoor het werkstuk in vele gevallen teruggebracht is tot een meer bekend of gemakkelijker op te lossen.

Weet men, dat in een driehoek de hoek tusschen de lijn, die den tophoek middendoor deelt, en de hoogtelijn uit het toppunt gelijk is aan de helft van het verschil der grondhoeken, dan kan men bij werkstukken, waarin het verschil der grondhoeken en een der twee zooeven genoemde lijnen gegeven is, terstond den rechthoekigen driehoek construeeren, welke door die twee lijnen met de grondlijn gevormd wordt.

Wil men een driehoek construeeren, waarvan de drie zwaartelijnen gegeven zijn, dan is dat vrij gemakkelijk, wanneer men weet, dat die drie lijnen door één punt gaan en elkaar verdeelen in stukken, die zich verhouden als 1 tot 2. Zonder de kennis van deze eigenschappen zou het vraagstuk heel moeilijk zijn, en waarschijnlijk zou men geen oplossing vinden, voor dat die twee eigenschappen waren opgespoord.

Wie alleen de stellingen kent, die voorkomen in de meeste leerboeken der vlakke meetkunde, zou niet zonder groote moeite een driehoek kunnen construeeren, waarvan de grondlijn gegeven is met den tophoek en den straal des ingeschreven cirkels. Gemakkelijk daarentegen wordt dat werkstuk opgelost door hem, die een der twee volgende eigenschappen kent: *de meetkundige plaats der middelpunten van de ingeschreven cirkels der driehoeken*, *die in een zelfde cirkelsegment staan*, *is een*

cirkelboog, die door de koorde van het segment wordt onderspannen en zijn middelpunt heeft in het midden van den boog, die den boog van het segment aanvult tot een geheelen cirkelomtrek.

De grondlijn van een driehoek is gelijk aan den afstand van het raakpunt van een opstaande zijde met den ingeschreven cirkel tot het raakpunt van den aangeschreven cirkel, dat op het verlengde van dezelfde zijde aan den kant der grondlijn ligt.

Bedient men zich van de laatste eigenschap, dan neemt men een hoek gelijk aan den gegeven tophoek en plaatst daarin een cirkel, die de beenen raakt en zoo groot is als de ingeschreven cirkel. Van de raakpunten van dien cirkel af zet men de grondlijn op de beenen uit; dan vindt men de raakpunten van die beenen met den aangeschreven cirkel, die aan de bazis zelf raakt.

Men kan den aangeschreven cirkel dus construeeren en vervolgens een gemeenschappelijke raaklijn trekken aan den aan- en den ingeschreven cirkel. Die gemeenschappelijke raaklijn, gemeten tot aan de beenen van den tophoek, is de bazis.

§ 118. Heeft iemand, langs synthetischen weg voortgaande, allerlei eigenschappen van een figuur opgespoord en stelt hij ten slotte een van die eigenschappen als vraagstuk, dan is er in den regel voor een tweede persoon meer inspanning noodig om de oplossing te vinden, dan de steller van het vraagstuk behoefde, om die eene eigenschap met meer andere te vinden. De steller kan een zeer eenvoudigen weg zijn langs gewandeld; maar voor wie dien weg niet kent, is het hoogst moeilijk op dezelfde plaats te komen. En dit wordt geheel een zaak van toeval, als men niet het vraagstuk voorloopig ter zijde laat, om de betrokken figuur te bestudeeren.

§ 119. We hebben reeds aan onderscheiden voorbeelden laten zien, dat de kennis van verschillende eigenschappen, die niet in de gewone leerboeken der vlakke meetkunde voorkomen, wenschelijk ja zelfs noodig is bij het oplossen van meer ingewikkelde vraagstukken. Merkwaardige voorbeelden daarvan worden opgeleverd door de zoogenaamde nieuwere meetkunde. Men leert daar, hoe bv. een groot aantal eigenschappen, die betrekking hebben op het door één punt gaan van drie rechte lijnen, alle bewezen worden met behulp van een enkele eigenschap

der transversalen. Kent men deze eigenschap, dan tracht men haar toe te passen bij alle vraagstukken, waarin men moet bewijzen, dat 3 lijnen door één punt gaan. En in den regel bereikt men zoodoende op vrij eenvoudige wijze zijn doel.

§ 120. Doen zich verschillende gevallen voor bij een werkstuk of een stelling, dan begint men met het geval, dat om een of andere reden als het gemakkelijkste kan beschouwd worden. Voor de overige gevallen plaatse men dan de letters op overeenkomstige wijze als bij het eerste geval. Het blijkt dan terstond, in hoever de redeneering of de constructie van het eerste geval onveranderd kan worden overgebracht op een volgend geval en in hoeverre wijziging noodig is.

DE MEETKUNDE IN DE RUIMTE AANGEWEND TOT HET BEWIJZEN VAN EIGENSCHAPPEN DER VLAKKE MEETKUNDE.

---

§ 121. STELLING. *De gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen van drie cirkels, twee aan twee genomen, ontmoeten elkaar in drie punten, die op één rechte lijn liggen.*

De drie cirkels kunnen beschouwd worden als de doorsneden van drie bollen door een plat vlak, dat door hun middelpunten gaat. De kegels, die de bollen twee aan twee uitwendig omhullen, snijden het platte vlak volgens twee uitwendige raaklijnen der cirkels. De twee platte vlakken, die de 3 bollen ieder aan een zelfden kant raken, gaan door de toppen dier kegels en snijden het eerstgenoemde vlak in een zelfde rechte lijn, die door de toppen der kegels gaat en dus ook door de drie snijpunten der gemeenschappelijke uitwendige raaklijnen.

Evenzoo voor twee paar inwendige en één paar uitwendige raaklijnen der cirkels.

Op een zelfde manier kan men deze eigenschap bewijzen: *Als drie cirkels elkaar zoodanig snijden, dat een deel van hun*

plat vlak aan de drie cirkels gemeen is, gaan de drie gemeenschappelijke koorden van de cirkels, twee aan twee genomen, door één punt.

§ 122. Stelling. *Als twee veelhoeken in een zelfde plat vlak liggen, krijgt men een nieuwen veelhoek, als men naar grootte en richting beurtelings een zijde neemt van elk der twee veelhoeken.*

Men kan zich altijd een prismoïde denken, waarvan grond- en bovenvlak de zijden gelijk en evenwijdig hebben aan de zijden der twee veelhoeken. De middendoorsnede van het lichaam is dan een veelhoek, waarvan de zijden evenwijdig loopen met de zijden van grond- en bovenvlak, en gelijk zijn aan de helft van deze. Een veelhoek dus, waarvan de zijden tweemaal zoo groot zijn als de zijden der middendoorsnede en met deze evenwijdig loopen, voldoet aan de gestelde voorwaarden.

Opmerking. Men kan deze eigenschap ook bewijzen, door gebruik te maken van de stelling der vlakke meetkunde, dat een gebroken lijn gesloten is, als haar projecties op twee elkaar snijdende lijnen nul zijn. Men moet dan de projectie *ab* van AB als positief of negatief beschouwen al naar *ab* naar de eene of de andere zijde is gericht.

§ 123. *Elke twee diagonalen van een regelmatigen vijfhoek verdeelen elkaar in de uiterste en middelste reden. Is de omgekeerde eigenschap ook waar?*

Projecteert men een rechte lijn, die in de uiterste en middelste reden verdeeld is, met haar deelpunt op een plat vlak, dan krijgt men een rechte lijn, die in de uiterste en middelste reden verdeeld is.

Stellen wij ons nu voor, dat een regelmatige vijfhoek geprojecteerd wordt op een plat vlak, waarmee hij niet evenwijdig is en waar hij ook niet rechthoekig op staat. De projectie is dan een vijfhoek, die niet regelmatig is, maar waarvan de diagonaal elkaar wel 2 aan 2 in de uiterste en middelste reden verdeelen. Hieruit blijkt, dat de gestelde vraag ontkennend moet beantwoord worden.

GEMENGDE VRAAGSTUKKEN.

---

1. Een cirkelomtrek te beschrijven, die raakt aan een gegeven cirkelomtrek, door een gegeven punt gaat en waarvan het middelpunt op een gegeven rechte lijn moet liggen.

2. Een driehoek te beschrijven, waarvan gegeven is een zijde, de som der andere zijden en de som der hoogtelijnen op deze 2 zijden.

3. Uit een gegeven punt als middelpunt een cirkel te beschrijven, die de eigenschap heeft, dat de raaklijnen, uit twee gegeven punten er aan getrokken, elkaar snijden onder een gegeven hoek.

4. Een driehoek te beschrijven, als gegeven zijn de tophoek, de lijn die den tophoek middendoor deelt, gemeten tot aan de grondlijn, en de verhouding van de grondlijn tot de som der opstaande zijden.

5. Trek een rechte lijn zoodanig, dat de som der loodlijnen die men er op kan neerlaten uit drie gegeven punten, een gegeven lengte bezit.

6. Beschrijf een driehoek, waarvan gegeven zijn twee hoeken en het verschil der overstaande zijden.

7. Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven zijn de opstaande zijden en de verhouding van de hoogte tot de grondlijn.

8. Construeer een driehoek, waarvan gegeven zijn de som der opstaande zijden en de stukken, waarin de grondlijn wordt verdeeld door de hoogtelijn uit het toppunt.

9. Een driehoek te beschrijven, waarvan gegeven is een hoek, de hoogtelijn op de overstaande zijde en de som der andere hoogtelijnen.

10. Beschrijf een vierkant, waarvan de zijden door 4 gegeven punten gaan.

11. Construeer een driehoek, waaraan gegeven is een zijde, de hoogtelijn op die zijde en de verhouding van een tweede zijde tot de overeenkomstige hoogtelijn.

12. Beschrijf een driehoek met gegeven grondlijn, gegeven hoogte en gegeven middellijn van den ingeschreven cirkel.

13. Beschrijf een parallelogram, waarvan de hoeklijnen gegeven zijn met de verhouding van twee opeenvolgende zijden.

14. Construeer een rechthoek, wiens zijden door 4 gegeven punten gaan en waarvan een zijde gelijk is aan een gegeven rechte lijn.

15. Beschrijf een cirkelomtrek, waarvan de straal gegeven is en waaraan men raaklijnen van gegeven lengte kan trekken uit twee gegeven punten.

16. Beschrijf een vierhoek, waarvan de zijden door vier gegeven punten gaan en die gelijkvormig is met een gegeven vierhoek.

17. In een driehoek een rechte lijn te trekken zoodanig, dat er een trapezium ontstaat, waarvan de som der evenwijdige zijden gelijk is aan de som der beenen.

18. Bewijs, dat twee parallelogrammen de hoeken gelijk hebben, als zij even groot zijn, en het verschil der kwadraten van de hoeklijnen gelijk hebben.

19. Van een ingeschreven zeshoek weet men, dat de eerste zijde evenwijdig loopt met de vierde en de tweede met de vijfde. Bewijs, dat de andere twee zijden ook evenwijdig loopen.

20. In een gegeven driehoek een rechthoek te beschrijven, die zoo groot is als een gegeven rechthoek.

21. Wanneer men in een driehoek ABC uit het hoekpunt A een lijn AD naar de overstaande zijde of 't verlengde daarvan trekt, dan is steeds:

$$BC \times BD \times CD = AB^2 \times CD \pm AC^2 \times BD \pm AD^2 \times BC,$$

waarbij de bovenste of onderste teekens moeten genomen worden, al naar AD de lijn BC zelf of haar verlengde ontmoet.

22. Uit een hoekpunt van een driehoek trekt men een lijn naar de overstaande zijde, en uit het midden van die zijde een lijn, evenwijdig aan de eerst getrokken lijn. Hetzelfde doet men uit de twee andere hoekpunten. Nu vraagt men te bewijzen, dat de lijnen, uit de middens der zijden getrokken, elkaar in één punt snijden, zoo de drie andere lijnen door één punt gaan?

23. Om een scherphoekigen driehoek heeft men een cirkel beschreven en uit twee hoekpunten loodlijnen op de tegenoverstaande zijden neergelaten. Deze loodlijnen worden verlengd tot zij den cirkel snijden. Men vraagt te bewijzen, dat het stuk van een der loodlijnen, begrepen tusschen haar snijpunt met de andere en dat met den cirkel door de zijde, waarop ze is neergelaten, middendoor gedeeld wordt.

24. Construeer een rechthoekigen driehoek, als gegeven zijn een rechthoekszijde en de lijn, die uit een hoekpunt getrokken de andere rechthoekszijde middendoor deelt.

25. Een driehoek te construeeren, waarvan gegeven is de tophoek, de lijn, die den tophoek middendoor deelt, en het verschil der grondhoeken.

26. Als P een punt is in het parallelogram ABCD, vraagt men te bewijzen, dat △ PBD de som of het verschil is van de driehoeken PAB en PBC.

27. Door 3 gegeven punten 3 rechte lijnen te trekken, die den grootst mogelijken gelijkzijdigen driehoek vormen.

28. Een driehoek te beschrijven, als gegeven zijn de tophoek, de loodlijn uit het toppunt op de grondlijn neergelaten en de rechte lijn, die het toppunt verbindt met het midden der grondlijn.

29. Van een rechthoekigen driehoek zijn gegeven de stralen van den in- en van den omgeschreven cirkel. Construeer dezen driehoek.

30. Men verlangt in een der zijden van een gegeven driehoek een punt te bepalen zoo, dat de loodlijnen uit dit punt op de beide andere zijden een gegeven verschil hebben.

31. Construeer in een gegeven cirkel drie gelijke cirkels, die elkander twee aan twee uitwendig en alle den gegeven cirkel inwendig raken, en bereken wat er van den gegeven cirkel overblijft, als de straal van den gegeven cirkel r is.

32. Van een rechthoekigen driehoek zijn gegeven de schuine zijde en de lijn, die, uit een der hoekpunten getrokken, de overstaande rechthoekszijde middendoor deelt. Construeer dezen driehoek.

33. Een parallelogram te beschrijven, dat zoo groot is als een gegeven vierkant, waarvan de hoogte gelijk is aan een gegeven rechte lijn en het verschil der vierkanten op de hoeklijnen gelijk aan een gegeven vierkant.

34. Wanneer men op de uiteinden eener middellijn AB van een cirkel twee raaklijnen AM en BN trekt en haar uiteinden kunnen door een derde raaklijn verbonden worden, dan zal de rechth. onder de stukken AM en BN altijd gelijk zijn aan 't kwadraat op den straal des cirkels; bewijs dit.

35. Van een driehoek ABC is gegeven de lijn CD, die den hoek C middendoor deelt en naar de overstaande zijde is getrokken $= a$, benevens de loodlijnen uit de beide andere hoekpunten op deze deellijn $= b$ en c. Men vraagt den driehoek te berekenen en te construeeren.

36. Door een punt binnen een gegeven hoek een rechte lijn te trekken, die de beenen van den hoek snijdt in 2 punten, wier afstanden tot het gegeven punt een gegeven verhouding hebben.

37. Als een cirkel beschreven is in een vierkant, dat verdeeld is in 4×169 onderling gelijke vierkanten, dan gaat de cirkel door 8 snijpunten van deellijnen. Bewijs dit.

38. Het produkt der zijden van den driehoek, die de voetpunten van de hoogtelijnen van driehoek ABC tot hoekpunten heeft, is gelijk aan drie niet opeenvolgende van de 6 stukken, waarin die voetpunten de zijden van driehoek ABC verdeelen. Bewijs dat. *Examen* K^1, 1882.

39. Als de grondlijn van een driehoek gegeven is in grootte en in stand, terwijl de som der beenen gelijk is aan een gegeven rechte lijn, vraagt men de meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen, uit de einden der grondlijn neergelaten op de rechte lijn, die den topbuitenhoek middendoor deelt.

40. De straal van een cirkel is r. De koorde, die zekeren boog onderspant, is k_1. Gevraagd hierin uit te drukken de koorden k_3 en k_4 die bogen onderspannen welke respectievelijk 3 en 4 maal zoo groot zijn als de boog door k_1 onderspannen. Met behulp van de gevonden formules de zijden te berekenen van den ingeschreven regelmatigen vier- en vijfhoek.

41. Als 3 cirkels gegeven zijn met ongelijke stralen, wordt gevraagd een punt te vinden, waaruit men gelijke raaklijnen aan die cirkels kan trekken.

42. De twee stralen, welke een koorde in drie gelijke deelen verdeelen, verdeelen den kleinsten cirkelboog, welke door die koorde wordt onderspannen, in drie stukken, waarvan het middelste grooter is dan de andere twee. Bewijs dat.

43. Beschrijf een driehoek, als gegeven zijn de grondlijn, de tophoek en de middellijn van den ingeschreven cirkel.

44. Van een driehoek zijn gegeven: een der zijden, de straal van den omgeschreven en die van den ingeschreven cirkel. Construeer hieruit den driehoek.

45. Uit een gegeven punt een rechte lijn te trekken door een gegeven driehoek, zoodanig, dat wanneer men op die lijn loodlijnen neerlaat uit de hoekpunten van den driehoek, de loodlijn aan de eene zijde van de lijn gelijk is aan de som der loodlijnen aan de andere zijde van die lijn gelegen.

46. Als H het punt is, waarin de hoogtelijn AD van een driehoek ABC wordt ontmoet door de andere hoogtelijnen, en men verlengt AD, tot zij den omgeschreven cirkel snijdt in E, dan is DE = DH. Bewijs dat.

47. Als P een punt binnen een rechthoek ABCD is, vraagt men te bewijzen, dat

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

48. Binnen een gegeven vierhoek een punt te bepalen, zoodanig dat lijnen, uit dat punt naar de vier hoekpunten getrokken, den vierhoek verdeelen in vier driehoeken, waarvan elke twee niet opeenvolgende even groot zijn.

49. In het vlak van een driehoek ligt een tweede driehoek, die congruent is met den eersten en dien men niet behoeft om te keeren, als men hem wil laten samenvallen met den eersten driehoek. Bepaal het punt, waarom men den tweeden driehoek moet laten draaien, om hem door zulk een beweging in den stand van den eersten driehoek te brengen.

50. Als men door het midden B van een cirkelboog ABC twee koorden BD en BE trekt, die de koorde AC snijden in twee punten F en H, dan liggen F, H, D en E op den omtrek van een zelfden cirkel. Bewijs dat.

51. Als een aan twee zijden begrensde rechte lijn en een onbepaald verlengde rechte lijn gegeven zijn, vraagt men op de laatste het punt te bepalen, waaruit men de eerste onder den grootst mogelijken hoek ziet.

52. Men laat de uiteinden der schuine zijde van een winkelhaak glijden langs de beenen van een rechten hoek. Bepaal de meetkundige plaats van het hoekpunt van den rechten hoek.

53. Beschrijf om een gegeven driehoek den grootst mogelijken driehoek, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek.

54. Trek door twee gegeven punten een cirkelomtrek, die een gegeven cirkelomtrek halveert.

55. Wat is de kleinste cirkel, die een gegeven stomphoekigen driehoek bevat?

56. De gemeenschappelijke koorde der cirkels, die de hoeklijnen van een trapezium tot middellijnen hebben, gaat door het snijpunt der beenen van het trapezium. Bewijs dat.

57. Beschrijf een cirkelomtrek, die drie gegeven cirkelomtrekken rechthoekig snijdt.

58. In een cirkel een driehoek te beschrijven, waarvan twee zijden door twee gegeven punten A en B gaan, terwijl de derde zijde evenwijdig is aan AB.

59. Evenzoo wanneer de twee gegeven punten buiten den cirkel liggen.

60. Op twee gegeven cirkelomtrekken twee punten te bepalen, zoodanig dat de vereenigingslijn van de beide punten een gegeven lengte bezit en evenwijdig loopt met een gegeven lijn.

61. Als drie begrensde rechte lijnen in bepaalde standen gegeven zijn, vraagt men een punt te bepalen, zoodanig dat de driehoeken, welke dat punt tot toppunt en de gegeven lijnen als bazis hebben, alle drie even groot zijn.

62. Construeer een driehoek, als de grondlijn gegeven is in stand en in grootte, als het verschil der grondhoeken gegeven is en het toppunt op een gegeven rechte lijn moet liggen.

63. Beschrijf een vierhoek, waarvan de zijden gegeven zijn met de rechte lijn, die de middens van twee overstaande zijden vereenigt.

64. Als men door het snijpunt der hoeklijnen van een ingeschreven vierhoek een koorde trekt, die in dat punt wordt middendoor gedeeld, dan wordt het deel der koorde, dat binnen den vierhoek valt, middendoor gedeeld in hetzelfde punt. Bewijs dat.

65. Beschrijf een cirkelomtrek, die op gelijke afstanden verwijderd is van vier gegeven punten.

66. Door een punt buiten een cirkel een snijlijn te trekken, zoodanig dat het deel van het gegeven punt tot aan den cirkel zoo groot is als het deel, dat binnen den cirkel ligt.

67. Een driehoek te beschrijven, als men zijn omtrek kent, een hoek in ligging en grootte en een punt van de overstaande zijde.

68. Op een gegeven rechte lijn twee punten te bepalen, zóó dat de rechte lijnen, uit die punten naar een gegeven punt getrokken, een gegeven verhouding hebben en een gegeven hoek vormen.

69. Beschrijf een driehoek, als gegeven zijn: de straal van een aangeschreven cirkel, de straal van den ingeschreven cirkel en de omtrek.

70. Als een driehoek, die beschreven is om een gegeven standvastigen driehoek, zich zoodanig beweegt, dat hij gelijkvormig blijft aan zich zelve, dan doorloopt een punt van den bewegenden driehoek een cirkelomtrek. Bewijs dat.

71. Een cirkel te beschrijven, die raakt aan twee gegeven cirkels en aan een daarvan in een gegeven punt.

72. Als in een rechthoekigen driehoek ABC een vierkant DEFG zoodanig is beschreven, dat zijn zijde DE in de schuine zijde BC valt, dan is de zijde van het vierkant middenevenredig tusschen de stukken BD en EC van de schuine zijde. Bewijs dat.

73. Als Z het snijpunt der zwaartelijnen van een driehoek ABC is, heeft men

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\,(AZ^2 + BZ^2 + CZ^2).$$ Bewijs dit.

74. Het vierkant van den straal des cirkels, die beschreven is in een rechthoekigen driehoek, is gelijk aan de som der vierkanten van de stralen der cirkels, beschreven in de driehoeken, welke ontstaan, als men in den eersten driehoek de hoogtelijn op de schuine zijde neerlaat. Bewijs dat.

75. Beschrijf een driehoek, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek, in den ring, die gevormd wordt door twee concentrische cirkelomtrekken.

76. In een gegeven driehoek een rechthoek te beschrijven, waarvan een diagonaal gegeven is.

77. Construeer een cirkel, die de omtrekken van twee gegeven cirkels middendoor deelt.

78. Als de grondlijnen van twee driehoeken gegeven zijn en de som der vier opstaande zijden, vraagt men de voorwaarden te vinden, waaronder de som der oppervlakken van de twee driehoeken zoo groot mogelijk is.

79. Een driehoek te beschrijven, als de toppunten der gelijkzijdige driehoeken gegeven zijn, die men op de zijden van den gevraagden driehoek naar buiten kan beschrijven.

80. Een parallelogram te beschrijven, wanneer gegeven is de grondlijn, een der hoeken aan de grondlijn en de hoek, waaronder de diagonalen elkaar snijden.

81. Op een gegeven cirkelomtrek twee punten te bepalen, zóó dat de rechte lijnen, uit die punten naar een gegeven punt getrokken, een gegeven hoek vormen en zich verhouden als twee gegeven lijnen.

82. In een cirkel is een driehoek ABC beschreven. Zoo men uit het midden D van boog AB met DA of DB als straal een cirkel beschrijft, zal de omtrek van dezen door het middelpunt van den in △ ABC beschreven cirkel gaan en ook door het middelpunt van den cirkel, die de zijde AB uitwendig en de verlengden van de beide andere zijden inwendig raakt. Bewijs dit.

83. Deelt men de zijden en diagonalen van een vierhoek middendoor, en verbindt men de deelpunten van de overstaande zijden en van de diagonalen door drie rechte lijnen, dan is de som van de vierkanten van deze verbindingslijnen het vierde gedeelte van de som der vierkanten van de zijden en de diagonalen.

84. Bewijs, dat in elk trapezium het verschil der vierkanten op de lijnen uit de uiteinden der bovenlijnen naar het midden der grondlijn getrokken, gelijk is aan den rechthoek onder de bovenlijn en het verschil der stukken, die de loodlijnen, uit de uiteinden der bovenlijn neergelaten op de grondlijn, afsnijden van de grondlijn.

85. In een △ is een punt P door den afstand tot 2 zijden van dien △ gegeven. Men vraagt door dit punt een lijn te trekken, die den △ in twee gelijke deelen verdeelt.

86. Een △ te construeeren, als gegeven zijn de hoogte, de lijn, die den tophoek middendoor deelt, en de lijn uit den top naar het midden der grondlijn getrokken.

87. Een cirkel te beschrijven, die door twee punten gaat, terwijl de raaklijn, uit een derde punt naar den cirkel getrokken, gelijk is aan een gegeven rechte lijn.

88. In een gegeven cirkel zes gelijke regelmatige vijfhoeken te beschrijven, zoodanig dat de middelste met ieder der overige een zijde gemeen heeft.

89. Twee cirkels, de eene 36 en de andere 16 cM tot straal hebbende, worden met hun middelpunten langs de beide beenen van een rechten hoek bewogen. De eerste is 38 en de tweede 210 cM van het hoekpunt verwijderd, terwijl de snelheid van den eersten twee en van den tweeden acht cM per seconde is. Na hoeveel tijd zullen die cirkels elkander raken, en wanneer zullen de middelpunten het dichtst bij elkander zijn?

90. Met een gegeven straal een cirkel te beschrijven, die twee gegeven cirkels onder gegeven hoeken snijdt.

91. Construeer met een gegeven straal een cirkel, die twee gegeven cirkels zoodanig snijdt, dat de raaklijnen aan de snijpunten loodrecht op elkander staan.

92. Van een driehoek is gegeven de basis, de lijn uit het toppunt naar het midden der basis en 't verschil der opstaande zijden. Construeer dien driehoek.

93. Als men uit een punt in den omtrek eens cirkels loodlijnen neerlaat op de zijden van een in dien cirkel beschreven driehoek, liggen de voetpunten dier loodlijnen in een rechte lijn. Bewijs dit.

94. Construeer een rechthoekigen driehoek, als gegeven is de lijn, die een der scherpe hoeken middendoor deelt, gemeten tot aan 't punt waar zij gesneden wordt door de loodlijn uit het andere uiteinde der schuine zijde op haar neergelaten, en deze loodlijn.

95. Men vraagt een driehoek te beschrijven, waarvan gegeven zijn de grondlijn, de hoogte en de som der opstaande zijden.

96. Op twee zijden AB en BC van driehoek ABC zijn parallelogrammen ABFG en CBDE beschreven, de zijden GF en ED zijn verlengd tot zij elkander in H ontmoeten, uit H is door B een lijn tot AC getrokken en evenwijdig met deze en gelijk er aan AL en CK. Bewijs dat ACKL zoo groot is als ABFG en CBDE samen.

97. Gegeven een cirkel met een straal = R. Gevraagd vijf gelijke cirkels te beschrijven, die elkander allen uitwendig en den gegeven cirkel inwendig raken; de stralen dezer cirkels in R uit te drukken.